abiturma | ZEIT SCHÜLERCAMPUS

Originale Abituraufgaben Abiturprüfung Mathematik

Gymnasium Baden-Württemberg Jahrgänge 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 und Probe-Abitur

Laupheimer Str. 10, 70327 Stuttgart
info@abiturma.de
abiturma.de

Inhaltsverzeichnis

Pflichtteil 3
- Probe-Abi . . . 4
- 2017 . . . 6

Analysis 9
- Probe-Abi, Aufgabengruppe 1 . . . 10
- Probe-Abi, Aufgabengruppe 2 . . . 12
- 2017, Aufgabengruppe 1 . . . 13
- 2017, Aufgabengruppe 2 . . . 14

Analytische Geometrie 15
- Probe-Abi, Aufgabengruppe 1 . . . 16
- Probe-Abi, Aufgabengruppe 2 . . . 17
- 2017, Aufgabengruppe 1 . . . 18
- 2017, Aufgabengruppe 2 . . . 19

Stochastik 21
- Probe-Abi, Aufgabengruppe 1 . . . 22
- Probe-Abi, Aufgabengruppe 2 . . . 23
- 2017, Aufgabengruppe 1 . . . 24
- 2017, Aufgabengruppe 2 . . . 25

Lösungen 27

Pflichtteil 97
- 2016 . . . 98
- 2015 . . . 100
- 2014 . . . 102
- 2013 . . . 104

Analysis 107
- 2016, Aufgabengruppe 1 . . . 108
- 2016, Aufgabengruppe 2 . . . 109
- 2015, Aufgabengruppe 1 . . . 110
- 2015, Aufgabengruppe 2 . . . 111
- 2014, Aufgabengruppe 1 . . . 112
- 2014, Aufgabengruppe 2 . . . 113
- 2013, Aufgabengruppe 1 . . . 114
- 2013, Aufgabengruppe 2 . . . 115

Analytische Geometrie/Stochastik 117
- 2016, Aufgabengruppe 1 . . . 118

2016, Aufgabengruppe 2 120
2015, Aufgabengruppe 1 121
2015, Aufgabengruppe 2 123
2014, Aufgabengruppe 1 124
2014, Aufgabengruppe 2 125
2013, Aufgabengruppe 1 126
2013, Aufgabengruppe 2 127

Lösungen **129**

Pflichtteil

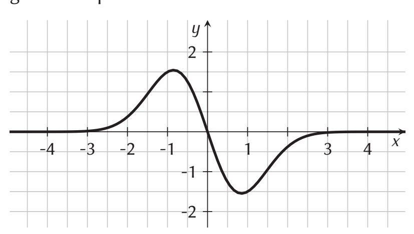
Pflichtteil Probe-Abi

Aufgabe 1
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \cos(x) \cdot e^{3x}$. *(1 VP)*

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(2\pi) = 5$. *(2 VP)*

Aufgabe 3
Lösen Sie die Gleichung $\left(x^3 - 9x\right) \cdot \left(e^x - e^{2x^2}\right) = 0$. *(2 VP)*

Aufgabe 4
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) f' besitzt mindestens zwei Nullstellen.

(2) Die Abbildung deutet darauf hin, dass es sich um den Graphen einer ganzrationalen Funktion handelt.

(3) f besitzt genau einen Wendepunkt.

(4) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx = 0$

(5) Jeder Graph einer Stammfunktion von f besitzt in $x = 0$ einen Tiefpunkt.

(5 VP)

Aufgabe 5
Gegeben sind die Ebene $E: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$ und die Gerade g mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Eine Ebene soll den Punkt $P(1|1|1)$ enthalten und orthogonal zu E sein. Bestimmen Sie eine mögliche Ebenengleichung einer Ebene F, die diese Bedingungen erfüllt.

c) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E.

(4 VP)

Aufgabe 6
Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(5|1|-3)$ auf der Gerade g_2, aber nicht auf der Geraden g_1 liegt.

b) Bestimmen Sie die Lagebeziehung von g_1 und g_2.

c) Geben Sie die Gleichung einer dritten Gerade g_3 an, die mit g_1 und g_2 jeweils einen gemeinsamen Schnittpunkt hat.

(3 VP)

Aufgabe 7
In einer Urne befinden sich acht Kugeln. Drei Kugeln sind mit der Zahl 1 gekennzeichnet, zwei mit der Zahl 2 und drei mit der Zahl 3.

a) Es wird dreimal ohne Zurücklegen eine Kugel gezogen und die Ereignisse A und B betrachtet:

A: Es werden drei gleiche Zahlen gezogen.

B: Es werden drei unterschiedliche Zahlen gezogen.

Bestimmen Sie $P(A)$ und $P(B)$.

b) Nun wird aus derselben Urne achtmal mit Zurücklegen gezogen. Formulieren Sie ein Ereignis C, für das gilt:

$$P(C) = 1 - \left(\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \right).$$

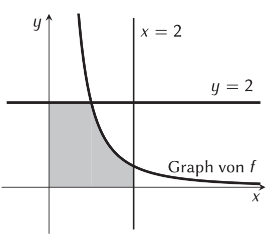
(3 VP)

Pflichtteil 2017

Aufgabe 1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \left(3 + \cos(x)\right)^4$. *(1,5 VP)*

Aufgabe 2
Lösen Sie die Gleichung $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$. *(3 VP)*

Aufgabe 3
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2};\ x > 0$.



Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche. *(3 VP)*

Aufgabe 4
Sind folgende Aussagen wahr? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.

(2) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.

(2,5 VP)

Aufgabe 5

Gegeben sind die Ebenen $E : x_1 + 3x_2 = 6$ und $F : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

a) Stellen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F.

c) Ermitteln Sie eine Gleichung einer Geraden, die in E enthalten ist und mit F keinen Punkt gemeinsam hat.

(4,5 VP)

Aufgabe 6
Gegeben sind eine Ebene E, ein Punkt P in E sowie ein weiterer Punkt S, der nicht in E liegt.
Der Punkt S ist die Spitze eines geraden Kegels, dessen Grundkreis in E liegt und durch P verläuft. Die Strecke PQ bildet einen Durchmesser des Grundkreises. Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten des Punktes Q bestimmen kann. *(3 VP)*

Aufgabe 7
In einer Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange nacheinander einzelne Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man höchstens drei Kugeln zieht. *(2,5 VP)*

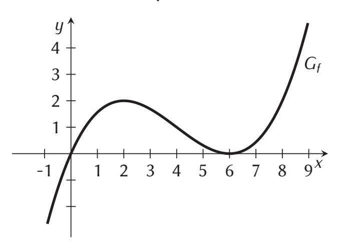
Analysis

Analysis, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 1

Aufgabe A 1.1
Der Graph G_f einer auf $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion dritten Grades f besitzt im Ursprung des Koordinatensystems eine Tangente mit der Gleichung $y = 2{,}25x$.

a) Desweiteren ist $A(4|1)$ ein Wendepunkt von G_f. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f. Bestimmen Sie anschließend die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.
[Zur Kontrolle: $f(x) = 0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 2{,}25x$] *(4 VP)*

b) Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen G_f.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(1) Der Graph der Ableitungsfunktion hat an der Stelle $x = 4$ eine Nullstelle.

(2) Die Graphen aller Stammfunktion von f haben einen Sattelpunkt.

(3) Die Graphen aller Stammfunktionen haben bei $x = 2$ eine Nullstelle.

(4) Der Graph der Ableitungsfunktion ist im Bereich $-\infty < x < 4$ monoton fallend.

(4 VP)

c) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion g, deren Graph man erhält, wenn man den Graphen der Funktion f an der x-Achse spiegelt. Zeichnen Sie den Graphen G_g dieser Funktion im Intervall $[0; 6]$ in das Koordinatensystem ein. *(1 VP)*

Die Graphen G_f und G_g beschreiben im Intervall $[0; 6]$ den Umriss eines Sees auf einer Karte. Eine Längeneinheit entspricht dabei einhundert Metern. Die y-Achse zeigt nach Norden.

d) Bestimmen Sie die längste Strecke, die zurückgelegt werden muss, wenn man den See in Nord-Süd-Richtung durchqueren möchte. *(1 VP)*

Der See wird durch eine Bojenlinie in zwei Teilstücke zerlegt. Der westliche Teil des Sees dient als Naturschutzgebiet diversen Vögeln als Brutstätte und Refugium. Der östliche Teil der Fläche darf von Schwimmern genutzt werden. Die Bojenlinie wird zwischen den Punkten $P(1|g(1))$ und $H(2|2)$ gespannt und in gleichmäßigen Abständen von drei Bojen unterteilt.

e) Bestimmen Sie die Länge der Leine und die Koordinaten der Bojen. Unter welchem Winkel trifft die Leine im Punkt H auf das Seeufer? Bestimmen Sie den Anteil der Seefläche, der den Schwimmern zur Verfügung steht. *(3 VP)*

Die Station der Badeaufsicht befindet sich 50 Meter vom Ufer entfernt und ist auf kürzestem Weg durch einen kleinen abgesperrten Weg mit dem Aufsichtsturm im Punkt $A(4|1)$, dem Rettungsweg, verbunden.

f) Zeichnen Sie sowohl den Aufsichtsturm als auch den Rettungsweg in die Zeichnung ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion, auf welcher der Rettungsweg liegt und berechnen Sie den Punkt, an dem sich die Wasserrettungsstation befindet. *(3 VP)*

Aufgabe A 1.2
Die städtische Verwaltung hat zum 1. Januar festgelegt, dass der See im Stadtwald für die Mitglieder des örtlichen Angelvereins „Angelhelden“ zum Forellenfischen freigegeben werden soll. Derzeit angeln die Mitglieder noch in den künstlichen Forellenteichen des Nachbarvereins. Die Bedingungen der Stadt für die Angelfreigabe lauten folgendermaßen: Der Verein muss dem Nachbarverein nicht weniger als 300 Forellen abkaufen, die in den See entlassen werden sollen.
Der Nachbarverein hat im letzten Jahr (Beobachtungsbeginn im Januar ist $t = 0$) seine Forellenbestände zu Beginn jeden Monats erfasst und die Zahlen in folgender Tabelle festgehalten.

Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
100	110	120	135	150	165	180	200	225	245	270	300

Der Verein wird die 300 Forellen erst verkaufen, wenn die gleiche Anzahl Fische in den eigenen Forellenteichen zurückbehalten werden kann. Der Vorsitzende der „Angelhelden“ vermutet aufgrund der Tabelle, dass sich die Anzahl der Fische in den Forellenteichen des Nachbarvereins durch eine Funktion B der Form

$$B(t) = ae^{bt}$$

beschreiben lässt, wobei t die Zeit in Monaten seit Beginn der Zählungen und $B(t)$ die Anzahl Forellen angibt.

a) Bestimmen Sie mit den Werten vom letzten Januar und letzten Mai die Werte für a und b in diesem Modell. Runden Sie dabei auf zwei Nachkommastellen.
[Zur Kontrolle: $B(t) = 100e^{0,1t}$] *(1 VP)*

b) Berechnen Sie die Anzahl der Fische für den Monat März des aktuellen Jahres. *(1 VP)*

c) In welchem Monat erlaubt der Fischbestand erstmals den Verkauf der geforderten 300 Forellen, wenn das Modell akzeptiert ist und die Vorjahresdaten zur Kalkulation verwendet werden? Warum ist das Modell nicht geeignet, um langfristig die Anzahl der Forellen in den Teichen anzugeben? *(2 VP)*

Analysis, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 2

Aufgabe A 2.1

Um Hufeisen zu schmieden, wird in einer Esse ein Stück Stahl auf 950 Grad Celsius erhitzt. Die momentane Änderungsrate der Temperatur des Stahlstückes nach dem Herausziehen aus der Esse wird in den ersten 40 Minuten beschrieben durch den Funktionsterm:

$$f(t) = -11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right).$$

Dabei ist $f(t)$ die momentane Änderungsrate in Grad Celsius pro Minute zum Zeitpunkt t und t die Zeit in Minuten. Nach 40 Minuten hat das Hufeisen Umgebungstemperatur angenommen und die Temperatur verändert sich nicht mehr.

a) Wie schnell kühlt das Stück Stahl eine Minute nach dem Herausziehen aus der Esse ab? Wie ist die durchschnittliche Abkühlgeschwindigkeit in den ersten 20 Minuten? Wann beträgt die Abkühlgeschwindigkeit 20 °C/min? *(5 VP)*

b) Zeichnen Sie den Graphen von f im angegebenen Zeitraum. *(2 VP)*

c) Wann kühlt das Stück Stahl am schnellsten ab? Wann am langsamsten? *(3 VP)*

d) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Temperatur des Stahlstückes zum Zeitpunkt t beschreibt. Ab einer Temperatur von 750 °C kann der Hufschmied das Eisen nicht mehr formen. Wie lange hat er Zeit, um aus dem Stahlstück das Hufeisen zu machen? Wie ist die Raumtemperatur im Schmiederaum? *(4 VP)*

e) Bestimmen Sie einen Funktionsterm $g(t)$ mithilfe einer Sinusfunktion, sodass

$$f(t) = g(t) \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 40$$

gilt. *(2 VP)*

Aufgabe A 2.2

Ein weiteres Stahlstück wird in derselben Esse auf 950 Grad Celsius erhitzt und anschließend herausgenommen. Nach 10 Minuten außerhalb der Esse taucht der Schmied dieses, dann circa 600 °C heiße Hufeisen, in ein Wasserbad, damit es schneller abkühlt. Das Wasserbad bewirkt, dass die Temperatur des Hufeisens ab diesem Zeitpunkt linear mit einer Abkühlgeschwindigkeit von 50 Grad Celsius pro Minute abnimmt.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm, der die Temperatur ab diesem Zeitpunkt beschreibt. Wann hat das Hufeisen die Temperatur 30 Grad Celsius? *(2 VP)*

b) Wie ist die durchschnittliche Abkühlgeschwindigkeit während des gesamten Prozesses vom Herausziehen aus der Esse bis zu den im Wasserbad erreichten 30 Grad Celsius? *(2 VP)*

Analysis, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 1

Aufgabe A 1.1

Die Anzahl der Käufer einer neu eingeführten Smartphone-App soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Änderungsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0{,}5t}; \quad t \geq 0$$

(t in Monaten nach der Einführung, $f(t)$ in Käufer pro Monat).

a) Zunächst werden nur die ersten zwölf Monate nach der Einführung betrachtet.
Geben Sie die maximale momentane Änderungsrate an.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer als 4000 Käufer pro Monat ist.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate am stärksten abnimmt bzw. zunimmt. *(4,5 VP)*

b) Zeigen Sie, dass für $t > 2$ die Funktion f streng monoton fallend ist und nur positive Werte annimmt.
Interpretieren Sie dies in Bezug auf die Entwicklung der Käuferzahlen. *(4 VP)*

c) Ermitteln Sie die Gesamtzahl der Käufer sechs Monate nach Einführung der App.
Bestimmen Sie den Zeitraum von zwei Monaten, in dem es 5000 neue Käufer gibt. *(3,5 VP)*

d) Bei einer anderen neuen App erwartet man maximal 30 000 Käufer. In einem Modell soll angenommen werden, dass sich die Gesamtzahl der Käufer nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums entwickelt. Sechs Monate nach Verkaufsbeginn gibt es bereits 20 000 Käufer.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm, welcher die Gesamtzahl der Käufer in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt. *(3 VP)*

Aufgabe A 1.2

Die Funktion g ist gegeben durch $g(x) = x - \frac{1}{x^3}$; $x \neq 0$.

a) Die Tangente an den Graphen von g im Punkt B verläuft durch P(0|-0,5).
Bestimmen Sie die Koordinaten von B. *(2,5 VP)*

b) Es gibt einen Punkt auf dem Graphen von g, der den kleinsten Abstand zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 1$ besitzt.
Ermitteln Sie die x-Koordinate dieses Punktes. *(2,5 VP)*

Lösung ab Seite 64

Analysis, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 2

Aufgabe A 2.1

An einem Stausee wird der Zu- und Abfluss künstlich geregelt. Dabei wird die momentane Zuflussrate beschrieben durch die Funktion z mit

$$z(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25; \quad t \geq 0.$$

Die konstante Abflussrate wird beschrieben durch die Funktion a mit

$$a(t) = 19; \quad t \geq 0$$

(t in Stunden seit Beobachtungsbeginn, $z(t)$ und $a(t)$ in $1000\,\text{m}^3/\text{h}$).

a) Zunächst werden die ersten 24 Stunden nach Beobachtungsbeginn betrachtet.
Bestimmen Sie die minimale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum nimmt die Wassermenge im Stausee ab?
Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge.
(4 VP)

b) Zu Beobachtungsbeginn befinden sich $2\,500\,000\,\text{m}^3$ Wasser im See.
Bestimmen Sie die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Begründen Sie, dass die Wassermenge in jedem 24-Stunden-Zeitraum um $144\,000\,\text{m}^3$ zunimmt.
Welchen Wert müsste die konstante Abflussrate haben, damit nach Ablauf von 14 Tagen die Wassermenge im Stausee $4\,180\,000\,\text{m}^3$ betragen würde? *(5,5 VP)*

Aufgabe A 2.2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$.

a) Die Gerade g durch den Hochpunkt H und den Tiefpunkt T des Graphen von f schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten P und Q.
Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der Strecke HT an der Strecke PQ. *(4 VP)*

b) Begründen Sie, dass die Steigung des Graphen von f keine Werte kleiner als -3 annehmen kann. *(2 VP)*

c) Der Graph von f und die Gerade h mit der Gleichung $y = 2$ schließen eine Fläche ein. Diese Fläche rotiert um die Gerade h.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers. *(2,5 VP)*

d) Eine Parallele zur x-Achse schneidet aus dem Graphen von f ein Kurvenstück aus, das den Tiefpunkt enthält. Die Endpunkte dieses Kurvenstücks haben den Abstand 2,5 voneinander.
Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Parallelen. *(2 VP)*

Analytische Geometrie

Lösung ab Seite 71

Analytische Geometrie, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 1

Aufgabe B 1.1

Vom Tower eines Flughafens werden zwei Flugzeuge beobachtet. Alle Längenangaben sind in Kilometern, alle Zeitangaben in Stunden angegeben. Das erste Flugzeug F_1 fliegt auf der Flugbahn f_1 mit

$$f_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -40 \\ -50 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t_1 \in \mathbb{R}.$$

Das bedeutet: Zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ befindet sich das Flugzeug F_1 im Punkt A(-40|-50|4) und bewegt sich in einer Stunde um den Richtungsvektor von f_1 weiter durch den Raum. Die Flugbahn f_2 des zweiten Flugzeugs F_2 wird analog beschrieben durch

$$f_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad t_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge kreuzen und entscheiden Sie, ob es zu einem Zusammenstoß kommt, wenn die Beobachtung zum Zeitpunkt $t_1 = t_2 = 0$ startet. *(5 VP)*

b) Berechnen Sie den Abstand, den die beiden Flugzeuge zum Zeitpunkt $t_1 = t_2 = 3$ besitzen. *(1 VP)*

c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_H, zu dem sich die Flugzeuge auf gleicher Höhe befinden. *(2 VP)*

d) Bestimmen Sie durch Rechnung, welches Flugzeug mit der höheren Geschwindigkeit fliegt und wie lange dieses für eine Strecke von 600 km benötigt. *(2 VP)*

Lösung ab Seite 73

Analytische Geometrie, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 2

Aufgabe B 2.1

In der modernen Kunst spielen neben den klassischen Gemälden und Skulpturen auch mehrere Formen von „Installationen“ eine Rolle. Installationen sind Anordnungen von Gegenständen, oft auch zusammen mit einer bestimmten Beleuchtung und Ton- oder Videoeinspielungen.

Für den Aufbau der Installation „Frau Fabers Wohnzimmer“ sind folgende Eckdaten gegeben: Stellen die x_1x_2-Ebene den Boden und die x_1x_3- bzw. x_2x_3-Ebenen zwei der Wände dar, so befinden sich die Ecken eines Tetraeders bezüglich der dadurch festgesetzten Raumecke im Ursprung in den Punkten A(2|2|3), B(4|2,5|2), C(3|4|2,5) und S(2,5|2,5|3,5). Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

a) Die Decke des Raumes ist fünf Meter hoch. Drei Meter von jeder Wand entfernt ist ein Haken an der Decke angebracht. Dort soll mit einer gerade nach unten verlaufenden ausziehbaren Aluminiumstange das Tetraeder befestigt werden. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden, die die Aluminiumstange enthält. *(1 VP)*

Die Seitenwand ABS des Tetraeders besteht aus einer Spiegelfläche. Im Punkt L(5|0,5|1) steht ein Laser, der in die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3,8 \\ 3,6 \end{pmatrix}$ weist und auf diese Seitenwand trifft.

b) Zeigen Sie, dass die Spiegelfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist und berechnen Sie dessen Flächeninhalt. *(3 VP)*

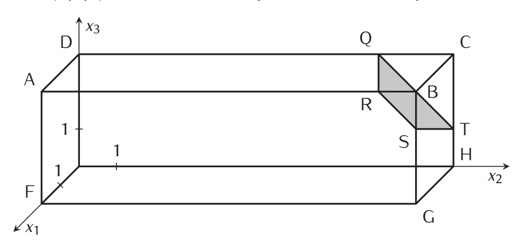
c) Zeigen Sie, dass der Laserstrahl auf die Spiegelfläche trifft. *(6 VP)*

Lösung ab Seite 78

Analytische Geometrie, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 1

Aufgabe B 1

Ein Künstler teilt einen quaderförmigen Container durch einen ebenen Schnitt in einen großen und einen kleinen Teilkörper. Der Container wird in einem Koordinatensystem als Quader mit den Eckpunkten A(2|0|3), B(2|10|3), C(0|10|3), D, F, G(2|10|0), H und O(0|0|0) dargestellt (Koordinatenangaben in Meter).
Die Ebene E schneidet die Kanten des Quaders in den Punkten R(2|9|3), S(2|10|2), T(0|10|1) und Q(0|8|3). Der kleine Teilkörper hat also die Eckpunkte Q, R, S, T, B, C.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.
Begründen Sie, dass es sich bei dem Viereck QRST um ein Trapez handelt.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes QRST.
[Teilergebnis: $E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22$] *(6 VP)*

b) Der kleine Teilkörper wird mit den Schnittkanten nach unten auf den großen Teilkörper gestellt.
Bestimmen Sie die Höhe des zusammengesetzten Körpers. *(1,5 VP)*

c) Der Container besitzt eine Tür, die im geschlossenen Zustand durch das Viereck ODAF dargestellt wird. Die Tür ist drehbar um die Kante, die durch die Strecke OD beschrieben wird.
Jede Ebene $T_a: ax_1 + x_2 = 0;\ a \geq 0$ beschreibt eine mögliche Stellung dieser Tür.
Bestimmen Sie den Wert für a, für den der Öffnungswinkel der Tür 30° beträgt. *(2,5 VP)*

Lösung ab Seite 82

Analytische Geometrie, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 2

Aufgabe B 2

Zwei Flugzeuge F_1 und F_2 bewegen sich geradlinig mit jeweils konstanter Geschwindigkeit über dem offenen Meer. In einem Koordinatensystem beschreibt dabei die x_1x_2-Ebene die Meeresoberfläche. Die Beobachtung der Flugzeuge beginnt um 14.00 Uhr.
Die Flugbahn von F_1 wird beschrieben durch die Gleichung

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in Minuten nach Beobachtungsbeginn}).$$

Der Punkt P(-17|54|3,2) beschreibt die Position von F_2 um 14.00 Uhr, der Punkt Q(1|36|3,8) die Position von F_2 um 14.03 Uhr (1 LE entspricht 1 km).

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von F_1 in km/min.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem F_1 eine Höhe von 4,9 km erreicht.
Berechnen Sie die Weite des Winkels, mit dem das Flugzeug F_2 steigt. *(3 VP)*

b) Die Flugbahnen von F_1 und F_2 schneiden sich. Aus Sicherheitsgründen müssen die Zeitpunkte, zu denen die Flugzeuge den Schnittpunkt ihrer Flugbahnen durchfliegen, mindestens eine Minute auseinander liegen.
Prüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. *(3 VP)*

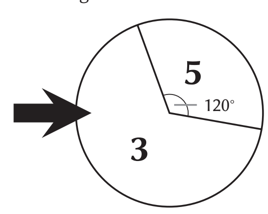
c) Die Position eines Ballons wird durch den Punkt B(6|43|4,3) beschrieben. Bestimmen Sie einen Zeitpunkt t_0, zu dem beide Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben.
Die Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt t_0 ebenfalls von beiden Flugzeugen gleich weit entfernt sind, liegen auf einer Geraden.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung dieser Geraden bestimmen kann. *(4 VP)*

Stochastik

Stochastik, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 1

Aufgabe C 1

Bei einer Tombola steht das folgende Glücksrad:



Das Glücksrad wird achtmal gedreht.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A : „Man erhält genau dreimal eine 3."

B : „Man erhält mindestens dreimal eine 3."

(2 VP)

Daneben liegt ein großer Laplace-Würfel, der die Augenzahlen 2, 2, 2, 4, 6, 6 besitzt. Es wird folgendes Spiel durchgeführt: Maria dreht das Glücksrad und Knut wirft den Laplace-Würfel. Es gewinnt die größere erreichte Zahl.

b) Maria erklärt: „Weil die Erwartungswerte für die erdrehte und die gewürfelte Zahl gleich sind, ist das Spiel fair." Zeigen und begründen Sie, dass die Erwartungswerte zwar übereinstimmen, das Spiel aber trotzdem nicht fair ist. *(4 VP)*

c) Berechnen Sie die Standardabweichungen für das Drehen des Glücksrades und den Würfelwurf. *(2 VP)*

d) Geben Sie eine Beschriftung des Laplace-Würfels so an, dass das Spiel fair wird. Ändern Sie dabei nur eine einzige Augenzahl. *(2 VP)*

Stochastik, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 2

Aufgabe C 2

Von einer Gruppe von 40 Personen möchten 30 ihren Sommerurlaub lieber im Ausland verbringen. 10 Personen bevorzugen einen Urlaub in Deutschland. Für einen Zeitungsartikel werden 5 Personen aus dieser Gruppe zufällig ausgewählt.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden nur Personen ausgewählt, die ihren Urlaub im Ausland verbringen möchten? *(1 VP)*

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangen genau 2 Personen in die Stichprobe, die ihren Urlaub in Deutschland verbringen wollen? Erläutern Sie Ihren Lösungsweg. *(2 VP)*

Im vergangenen Jahr ließen Umfrageergebnisse darauf schließen, dass 60 % der Deutschen für ihren nächsten Urlaub lieber ins Ausland reisen würden.

c) Wie groß war im vergangenen Jahr die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 befragten Personen mehr als 59 und weniger als 78 für ihren nächsten Urlaub ins Ausland reisen? *(1 VP)*

d) Wie viele Personen mussten im vergangenen Jahr mindestens befragt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Person zu befragen, die in Deutschland Urlaub machen möchte. *(2 VP)*

Nach vielen Medienberichten über zu hohe Preise und schlechten Service in der deutschen Tourismusbranche wird befürchtet, dass der Anteil der Personen, die Auslandsreisen bevorzugen, gestiegen ist. Im Auftrag der deutschen Tourismusbranche wird daher eine erneute Umfrage durchgeführt.

e) Entwickeln Sie einen rechtsseitigen Hypothesentest für einen Stichprobenumfang von 100 Personen, mit dem die Vermutung der Tourismusbranche bei einem Signifikanzniveau von 10 % untersucht werden kann. *(2 VP)*

f) Erläutern Sie an diesem Beispiel die möglichen Fehler bei der Entscheidung und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art, wenn tatsächlich 2 von 3 Personen Auslandsreisen bevorzugen. *(2 VP)*

Stochastik, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 1

Aufgabe C 1
Die Tabelle zeigt die prozentualen Anteile einiger Farben der in Deutschland fahrenden Autos:

Farbe	silber oder grau	schwarz	weiß
Anteil	29,9 %	28,8 %	15,1 %

Diese Anteile werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der jeweiligen Autofarben verwendet.

Zwei Kinder beobachten vorbeifahrende Autos und achten auf deren Farbe.

a) Zunächst beobachten die beiden Kinder 80 Autos.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A : „Genau 22 Autos sind silber oder grau."
B : „Mindestens 33 Autos sind schwarz."
C : „Unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei, die keine der in der Tabelle angegebenen Farben haben, und von den anderen 70 Autos sind höchstens 20 schwarz."

(3 VP)

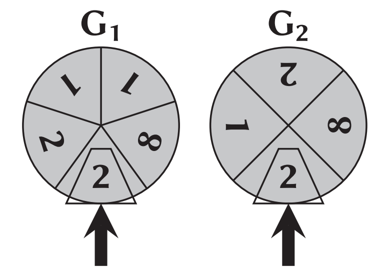
b) Wie hoch müsste der Anteil der schwarzen Autos mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % unter 100 beobachteten Autos mindestens 28 schwarz sind? *(2 VP)*

c) Das eine Kind bietet dem anderen folgendes Spiel an:
„Wenn von den nächsten vier Autos mindestens drei hintereinander nicht schwarz sind, bekommst du von mir ein Gummibärchen, ansonsten bekomme ich eines von dir".
Untersuchen Sie, ob dieses Spiel fair ist. *(2,5 VP)*

d) Es wird vermutet, dass der Anteil p der weißen Autos zugenommen hat. Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese $H_0 : p \leq 0{,}151$ auf dem Signifikanzniveau 10 % getestet. Dazu werden die Farben von 500 Autos erfasst.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. *(2,5 VP)*

Stochastik, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 2

Aufgabe C 2
Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht.



Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird. Der Spieleinsatz beträgt 2 €. Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausgezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt.
Der Hauptgewinn besteht also darin, dass 16 € ausgezahlt werden.

a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A : „Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1."
B : „Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10."
C : „Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn."

(3 VP)

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden.
Berechnen Sie, wie oft man dazu mindestens spielen muss. *(2 VP)*

c) Berechnen Sie, wie viel der Betreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient. *(2 VP)*

d) Der Betreiber möchte erreichen, dass bei zehn Spielen die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Hauptgewinn maximal 25 % beträgt.
Dazu möchte er beim Glücksrad G_2 den Mittelpunktswinkel des Kreissektors verändern, der mit der Zahl 8 beschriftet ist.
Berechnen Sie, wie weit der Mittelpunktswinkel dieses Kreissektors maximal gewählt werden darf. *(3 VP)*

Lösungen

Lösungen zu Pflichtteil, Probe-Abi

Lösung zu Aufgabe 1

Bei der Funktion f handelt es sich um das Produkt der Funktionen $u(x) = \cos(x)$ und $v(x) = \mathrm{e}^{3x}$. Dieses lässt sich mithilfe der Produktregel ableiten:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\implies \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Die Ableitung von u ist nach den Ableitungsregeln für trigonometrische Funktionen

$$u'(x) = -\sin(x).$$

Die Funktion v ist die Verkettung der äußeren Funktion $a(y) = \mathrm{e}^y$ und der inneren Funktion $b(x) = 3x$ mit den Ableitungen $a'(y) = \mathrm{e}^y$ und $b'(x) = 3$. Für die Ableitung der Funktion v gilt mithilfe der Kettenregel:

$$v(x) = a\big(b(x)\big)$$
$$\implies \quad v'(x) = b'(x) \cdot a'\big(b(x)\big) = 3 \cdot \mathrm{e}^{3x}.$$

Hiermit lässt sich nun die Ableitung von f bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= -\sin(x) \cdot \mathrm{e}^{3x} + \cos(x) \cdot 3 \cdot \mathrm{e}^{3x} \\ &= \big(3\cos(x) - \sin(x)\big) \cdot \mathrm{e}^{3x}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Es liegt eine Funktion vor, die durch lineare Verkettung aus der Sinusfunktion entsteht. Im Allgemeinen gilt für die Stammfunktion einer linearen Verkettung einer Funktion g, von der eine Stammfunktion G bekannt ist:

$$f(x) = a \cdot g(mx + b)$$
$$\implies \quad F(x) = \frac{a}{m} \cdot G(mx + b) + c.$$

In diesem Fall sind $a = 3$, $m = \frac{1}{2}$, $b = 0$ und c eine beliebige Konstante, sowie

$$g(x) = \sin(x),$$

mit der bekannten Stammfunktion $G(x) = -\cos(x)$.

Somit gilt

$$F(x) = -6\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c.$$

Der Wert von $c \in \mathbb{R}$ muss nun so gewählt werden, dass die Forderung $F(2\pi) = 5$ erfüllt ist. Es ist also folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} F(2\pi) = 5 \quad &\iff \quad -6\cos(\pi) + c = 5 \\ &\iff \quad -6 \cdot (-1) + c = 5 \\ &\implies \quad c = -1. \end{aligned}$$

Die gesuchte Stammfunktion lautet damit:

$$F(x) = -6\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1.$$

Lösung zu Aufgabe 3

Laut dem Satz vom Nullprodukt ist ein Produkt genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, und damit

$$\left(x^3 - 9x\right) \cdot \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x^2}\right) = 0 \quad \iff \quad x^3 - 9x = 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x^2} = 0.$$

Zunächst werden die Lösungen der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$x^3 - 9x = 0$$
$$\iff \quad x \cdot (x^2 - 9) = 0.$$

Die erneute Anwendung des Satzes vom Nullprodukt führt auf die Lösung $x = 0$, und weiterhin erhält man:

$$x^2 - 9 = 0 \quad \iff \quad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3.$$

Der erste Faktor nimmt also den Wert Null an, wenn x einen der Werte 0, -3 oder 3 hat.

Für den zweiten Faktor lautet die Gleichung:

$$\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x^2} = 0 \quad \iff \quad \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{2x^2}.$$

Zwei Potenzen bei gleicher Basis sind genau dann gleich, wenn ihre Exponenten übereinstimmen:

$$x = 2x^2 \quad \iff \quad 2x^2 - x = 0.$$

Man erhält entweder mithilfe der Mitternachtsformel oder durch Ausklammern von x und Anwenden des Satzes vom Nullprodukt die Lösungen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\left(x^3 - 9x\right) \cdot \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x^2}\right) = 0$$

lautet also

$$\mathcal{L} = \left\{-3;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 3\right\}.$$

☞ *Alternative:* Durch Ausklammern und Anwenden der dritten binomischen Formel erhält man eine Faktorzerlegung, aus der sich die Nullstellen direkt ablesen lassen:

$$x^3 - 9x = x \cdot (x^2 - 9) = x \cdot (x - 3) \cdot (x + 3)$$

Lösung zu Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist wahr. Der Graph der Funktion hat innerhalb des abgebildeten Bereiches einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt. An diesen Extremstellen befindet sich jeweils eine Nullstelle der ersten Ableitung.

(2) Die Aussage ist falsch. Die Abbildung deutet darauf hin, dass der Graph von f eine waagerechte Asymptote bei $y = 0$ besitzt. Dies bedeutet

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Da sich eine ganzrationale Funktion im Unendlichen immer wie der Summand mit dem höchsten Grad verhält, könnte der Grad von f höchstens 0 sein. Dann müsste f aber eine konstante Funktion sein, was nicht der Fall ist.

(3) Die Aussage ist falsch. Die Funktion hat zwischen den Extremstellen eine Wendestelle, aber auch zwischen $-\infty$ und dem Maximum sowie zwischen dem Minimum und $+\infty$ noch jeweils mindestens eine. Somit hat der Graph der Funktion f mehr als einen Wendepunkt.

(4) Die Aussage ist wahr. Der Graph der Funktion f ist offenbar punktsymmetrisch. Damit ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall von 0 bis 3 genauso groß wie diese Fläche zwischen Graph und x-Achse im Intervall von -3 bis 0. Erstere fließt positiv in das Integral ein, letztere negativ. Damit gilt:

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

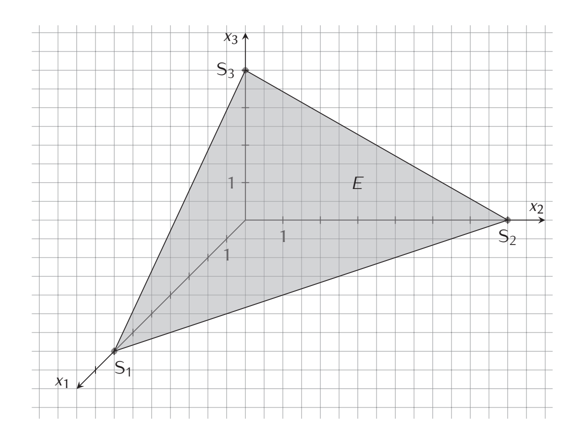
(5) Die Aussage ist falsch. Die Funktion f besitzt in $x = 0$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach -. Folglich haben die Graphen aller Stammfunktionen von f dort einen Hochpunkt.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Um die Ebene in ein Koordinatensystem einzuzeichnen werden die Spurpunkte berechnet. Für diese ergeben sich die Gleichungen:

$$4x_1 = 28 \implies x_1 = 7 \implies S_1(7|0|0)$$
$$4x_2 = 28 \implies x_2 = 7 \implies S_2(0|7|0)$$
$$7x_3 = 28 \implies x_3 = 4 \implies S_3(0|0|4)$$

Mithilfe der Punkte S_1, S_2 und S_3 kann nun die Ebene in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden:



b) Damit F senkrecht auf E steht, muss der Normalenvektor $\vec{n}_F$ von F senkrecht zu dem Normalenvektor von E sein. Ein Normalenvektor von E ist

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Es muss also gelten:

$$\vec{n}_E \circ \vec{n}_F = 0.$$

Das ist zum Beispiel für den folgenden Vektor der Fall:

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Ansatz für die Koordinatengleichung einer Ebene mit diesem Normalenvektor ist nun:

$$x_1 - x_2 = d.$$

Damit der Punkt (1|1|1) auf dieser Ebene liegt, muss nun gelten:

$$1 - 1 = d \iff 0 = d.$$

Eine mögliche Ebenengleichung für eine Ebene, die den Punkt (1|1|1) enthält und senkrecht auf E steht, ist also

$$F:\ x_1 - x_2 = 0.$$

☞ *Alternative:* Auch der Vektor

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene E. Ein Ansatz für die Koordinatengleichung einer Ebene mit diesem Normalenvektor ist nun:

$$7x_2 - 4x_3 = d.$$

Damit der Punkt $(1|1|1)$ auf dieser Ebene liegt, muss nun gelten:

$$7 - 4 = d \quad \Longleftrightarrow \quad 3 = d.$$

Eine mögliche Ebenengleichung für eine Ebene, die den Punkt $(1|1|1)$ enthält und senkrecht auf E steht, ist also

$$F: 7x_2 - 4x_3 = 3.$$

c) Um den Schnittpunkt der Ebene E mit der Gerade g zu bestimmen, werden die Zeilen der Geradengleichung g in die Ebenengleichung E eingesetzt:

$$\begin{aligned} & 4 \cdot (1 + 3s) + 4 \cdot (-1) + 7 \cdot (2 - 2s) = 28 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4 + 12s - 4 + 14 - 14s = 28 \\ \Longleftrightarrow \quad & -2s = 14 \\ \Longleftrightarrow \quad & s = -7 \end{aligned}$$

Nun wird der berechnete Parameter s in die Geradengleichung g eingesetzt. Dies liefert die Koordinaten des Schnittpunktes $S(-20|-1|16)$.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Der Punkt $P(5|1|-3)$ ist der Aufpunkt der Geraden g_2 und liegt somit auf g_2. Nun wird überprüft, ob der Punkt P auf der Geraden g_1 liegt. Dies ist der Fall, wenn es ein $s_0 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s_0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Für die erste Komponente gilt:

$$5 = 1 + 2s_0 \quad \Longleftrightarrow \quad s_0 = 2$$

und für die zweite Komponente:

$$1 = -3 + s_0 \quad \Longleftrightarrow \quad s_0 = 4$$

Dies führt zu einem Widerspruch und damit liegt der Punkt P nicht auf der Geraden g_1.

b) Zunächst wird überprüft, ob die Geraden parallel oder identisch sind. Dies ist der Fall, wenn der Richtungsvektor $\vec{v_1}$ der Geraden g_1 ein Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{v_2}$ der Geraden g_2 ist. Es ist also zu untersuchen, ob es eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, sodass gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dann müssten die jeweilige Koordinaten auf beiden Seiten übereinstimmen, es müsste also gelten:

$$2 = r \cdot 4 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{2}$$

$$1 = r \cdot (-5) \quad \Longrightarrow \quad r = -\frac{1}{5}$$

Das ist ein Widerspruch. Somit sind die beiden Geraden nicht parallel und damit auch nicht identisch.

Es bleibt zu überprüfen, ob sich die Geraden schneiden. Das ist genau dann der Fall, wenn die folgende Gleichung genau eine Lösung hat:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hierzu müssen alle drei Koordinaten auf beiden Seiten übereinstimmen, sodass man drei Gleichungen mit zwei Unbekannten erhält:

$$\begin{aligned} 1 + 2s &= 5 + 4t && \text{(I)} \\ -3 + s &= 1 - 5t && \text{(II)} \\ 5 - 3s &= -3 - t && \text{(III)} \end{aligned}$$

Nun kann man mittels Additionsverfahren die Variable s aus den anderen beiden Gleichungen eliminieren und erhält:

$$\text{(I)} - 2\text{(II)}: \quad 7 = 3 + 14t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{2}{7}$$

$$\text{(III)} + 3\text{(II)}: \quad -4 = -16t \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{4}$$

Da sich die entstehenden Gleichungen widersprechen, gibt es keinen gemeinsamen Punkt der Geraden g_1 und g_2.

Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Punkt haben, aber auch nicht parallel sind, heißen windschief. Somit sind die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander.

☞ *Alternative:* Zwei Geraden sind genau dann windschief zueinander, wenn ihre Richtungsvektoren linear unabhängig sind und in zwei verschiedenen parallelen Ebenen liegen. Der Normalenvektor dieser Ebenen muss dann senkrecht auf beiden Spannvektoren stehen, man erhält ihn zum Beispiel als Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren.

Das Kreuzprodukt der Spannvektoren der Geraden lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da dieses insbesondere ungleich dem Nullvektor ist, sind die Richtungsvektoren der Geraden g_1 und g_2 linear unabhängig. Die Geraden g_1 und g_2 liegen nun also jeweils innerhalb einer Ebene mit einer Ebenengleichung der Form

$$-14x_1 + 10x_2 + 6 = d.$$

Einsetzen der Stützvektoren ergibt, dass g_1 in der Ebene

$$E_1 : -14x_1 + 10x_2 + 6x_3 = -14 \cdot 1 + 10 \cdot (-3) + 6 \cdot 5 = -14$$

und g_2 in der Ebene

$$E_2 : -14x_1 + 10x_2 + 6x_3 = -14 \cdot 5 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot (-3) = -78$$

liegt. Da E_1 und E_2 verschieden und parallel und die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 linear unabhängig sind, sind die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander.

c) Eine beliebige Gerade g_3 durch einen Punkt auf g_1 und einen Punkt auf g_2 erfüllt die Bedingung, dass sie mit beiden Geraden einen gemeinsamen Punkt hat. Da g_1 und g_2 keine gemeinsamen Punkte haben, ist g_3 dann auch zu keiner dieser Geraden identisch und schneidet sie daher jeweils in genau einem Punkt.

Man kann nun zum Beispiel die Stützvektoren $\overrightarrow{P_1}$ und $\overrightarrow{P_2}$ aus den Geradengleichungen von g_1 und g_2 nehmen und erhält die Geradengleichung:

$$g_3 : \vec{x} = \overrightarrow{P_1} + t \cdot \left(\overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Aufgabe 7

a) ➤ *Ziehung dreier Kugeln ohne Zurücklegen*

Es gibt insgesamt

$$\binom{8}{3} = 56$$

Möglichkeiten, drei von acht Kugeln auszuwählen.

➤ *Ziehung dreier Kugeln mit gleicher Zahl*

Da nur zwei Kugeln mit der Zahl 2 gekennzeichnet sind, können nicht alle drei ohne Zurücklegen gezogenen Kugeln die Nummer 2 haben. Somit tritt das Ereignis A nur ein, wenn alle drei Kugeln die Nummer 1 oder die Nummer 3 haben.

Da jeweils nur drei Kugeln mit der Zahl 1 gekennzeichnet sind, hat nur bei einer einzigen Kombination aus drei Kugeln jede die Nummer 1. Das gleiche gilt für die Zahl 3.

Es gibt also genau zwei Kombinationen der Kugeln aus dem Gefäß, bei denen das Ereignis A eintritt. Damit lautet dessen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \frac{2}{56} = \frac{1}{28} \approx 0{,}036.$$

➤ *Ziehung dreier Kugeln mit unterschiedlichen Zahlen*

Damit die drei Kugeln alle eine unterschiedliche Zahl haben, muss jede Zahl genau einmal vorkommen. Nun gibt es drei Möglichkeiten für die Kugel mit der 1, zwei Möglichkeiten für die Kugel mit der 2 und drei Möglichkeiten für die Kugel mit der 3 und somit insgesamt $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten drei Kugeln mit unterschiedlichen Nummern auszuwählen. Also tritt bei 18 der 56 möglichen Kombinationen aus drei Kugeln das Ereignis B ein, sodass gilt:

$$P(B) = \frac{18}{56} = \frac{9}{28} \approx 0{,}321.$$

b) Gesucht ist ein Ereignis C, für das bei achtmaligem Ziehen einer Kugel aus der Urne mit Zurücklegen gilt:

$$P(C) = 1 - \left(\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 + \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \right).$$

Die beiden Terme

$$\binom{8}{0} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 \quad \text{und} \quad \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0$$

haben die Form

$$\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot p^{n-k} \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{4},\ n = 8,\ k = 0 \text{ beziehungsweise } k = 8.$$

Das ist die Formel für die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ bei einer binomialverteilten Zufallsvariable X mit Trefferwahrscheinlichkeit p und n Versuchen. Die Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{4}$ entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel bei einmaligem Ziehen die Zahl 2 trägt.

Der erste Summand in der Klammer gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass bei achtmaligem Ziehen mit Zurücklegen nie eine Kugel mit der Zahl 2 gezogen wird.

Der zweite Summand in der Klammer ist dagegen die Wahrscheinlichkeit, dass bei achtmaligem Ziehen mit Zurücklegen jedes Mal eine Kugel mit der Zahl 2 gezogen wird.

Da der Term in der Klammer von 1 abgezogen wird, kann C das Gegenereignis zum Ereignis sein, dass bei achtmaligem Ziehen entweder nie oder jedes Mal eine Kugel mit der Zahl 2 gezogen wird. Eine Möglichkeit für das Ereignis C ist also:

C: „Es wird mindestens einmal, aber nicht jedes Mal eine Kugel mit der Zahl 2 gezogen."

☞ *Alternative:* Eine andere Formulierung des Ereignisses C könnte sein:

C: „Es wird mindestens einmal, aber höchstens siebenmal eine Kugel mit der Zahl 2 gezogen."

Lösungen

Lösungen zu Pflichtteil, 2017

Lösung zu Aufgabe 1

Die Funktion f ist eine Verkettung von Funktionen $f(x) = u(v(x))$. Die innere Funktion v und die äußere Funktion u sind dabei gegeben durch

$v(x) = 3 + \cos(x)$ und $u(x) = x^4$.

Es gelten:

$v'(x) = -\cos(x)$ und $u'(x) = 4x^3$.

Nach der Kettenregel kann nun die Ableitung der Funktion f bestimmt werden:

$f'(x) = 4 \cdot (3 + \cos(x))^3 \cdot (-\sin(x))$.

Lösung zu Aufgabe 2

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$e^{4x} - 5 = 4e^{2x} \iff e^{4x} - 4e^{2x} - 5 = 0$.

Setzt man $e^{2x} = u$, dann muss gelten:

$u^2 - 4u - 5 = 0$

Mit der Mitternachtsformel erhält man:

$$u_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3,$$

und somit:

$u_1 = 5$ und $u_2 = -1$.

Die Rücksubstitution $u = e^{2x}$ liefert:

$e^{2x_1} = 5 \iff x_1 = \frac{1}{2} \ln 5$

$e^{2x_2} = -1 \implies$ keine weitere Lösung.

Die Lösungsmenge der Gleichung

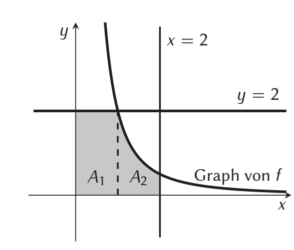
$e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

ist also gegeben durch $\mathcal{L} = \left\{ \frac{1}{2} \ln 5 \right\}$.



Lösung zu Aufgabe 3

Der Flächeninhalt der markierten Fläche setzt sich, wie in der folgenden Skizze dargestellt, aus zwei Teilflächen zusammen.



Zunächst wird der Schnittpunkt des Graphen von f mit der Gerade $y = 2$ bestimmt. Es gilt:

$$\frac{2}{x^2} = 2 \iff 2 = 2x^2 \iff x^2 = 1 \iff x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Die Lösung $x_1 = -1$ ist nicht relevant, weil für die schraffierte Fläche $x \geq 0$ gilt.

Die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f mit der Geraden $y = 2$ sind $S(1|2)$. Die Fläche A_1 ist die Fläche eines Rechtecks, und der Flächeninhalt ist gegeben durch:

$A_1 = 1 \cdot 2 = 2$.

Für den Flächeninhalt der Fläche A_2 gilt:

$$A_2 = \int_1^2 \frac{2}{x^2}\, dx = \int_1^2 \left(2 \cdot x^{-2}\right) dx = \left[-2 \cdot \frac{1}{x}\right]_1^2 = -2 \cdot \frac{1}{2} - \left(-2 \cdot \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Für den Flächeninhalt A gilt

$A = A_1 + A_2 = 2 + 1 = 3$.

Somit hat die schraffierte Fläche einen Flächeninhalt von 3 FE.

Lösung zu Aufgabe 4

(1) Die Aussage ist falsch. Eine Funktion besitzt nur dann eine Extremstelle, wenn die Ableitung eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Ein Gegenbeispiel für die Aussage ist folgende Funktion: $f(x) = x^3$.

(2) Die Aussage ist richtig. Für die Ableitung f' einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades gilt:

- Die Funktion f' ist ganzrationale Funktion dritten Grades
- Entweder ist $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$ oder $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$.

Folglich hat die Funktion f' mindestens eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel und die Funktion f eine Extremstelle.

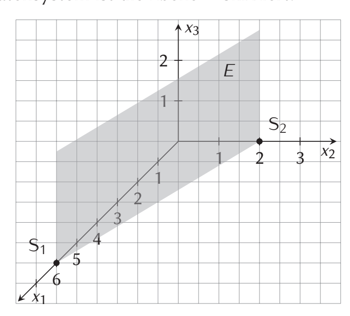
Lösungen

Lösung zu Aufgabe 5

a) Zunächst werden die Spurpunkte der Ebene E bestimmt. Hierzu werden jeweils zwei Koordinaten Null gesetzt und der Wert der dritten Koordinate bestimmt. Es gelten:

$S_1(6|0|0)$ und $S_2(0|2|0)$.

Die Ebene E hat keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse, sie ist also parallel zur x_3-Achse. Im folgenden Koordinatensystem ist die Ebene E skizziert.



b) Zunächst wird die Ebene F in Koordinatenform dargestellt. Der Normalenvektor kann aus der Normalenform abgelesen werden, es gilt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und ein Ansatz für eine Koordinatengleichung von F ist gegeben durch:

$$F: \; 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = a.$$

Die Ebene F enthält den Punkt $A(2|5|3)$, damit kann der Wert des Parameters a bestimmt werden:

$$2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = a \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = a.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene F ist damit:

$$F: 2x_1 - x_3 = 1.$$

Gesucht ist die Schnittgerade der beiden Ebenen E und F:

$$E: \; x_1 + 3x_2 = 6$$
$$F: \; 2x_1 - x_3 = 1.$$

Setzt man $x_1 = r$, dann gelten:

$$r + 3x_2 = 6 \iff 3x_2 = 6 - r \iff x_2 = 2 - \frac{r}{3},$$
$$2r - x_3 = 1 \iff -x_3 = 1 - 2r \iff x_3 = -1 + 2r.$$

Eine Gleichung der Schnittgeraden g ist gegeben durch

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} r \\ 2 - \frac{r}{3} \\ -1 + 2r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

c) Eine Gleichung einer Geraden h, die in E enthalten ist, aber keinen Punkt mit F gemeinsam hat, kann bestimmt werden, indem

- als Stützvektor der Geraden h ein Ortsvektor eines Punktes gewählt wird, der in E enthalten ist, aber nicht in F,
- als Richtungsvektor der Richtungsvektor der Schnittgeraden verwendet wird.

Der Punkt $S_1(6|0|0)$ liegt gemäß Teilaufgabe a) in der Ebene E, aber nicht in der Ebene F, denn es gilt:

$$6 + 3 \cdot 0 = 6 \implies P \text{ liegt in } E.$$
$$2 \cdot 6 - 0 = 6 \neq 1 \implies P \text{ liegt nicht in } F.$$

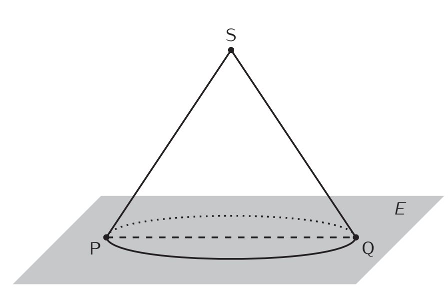
Die Gerade h mit der Gleichung

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

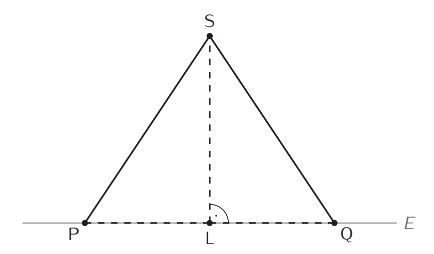
erfüllt die geforderte Bedingung.

Lösung zu Aufgabe 6

Zunächst wird eine Skizze mit der Ebene E, den Punkten P und S und dem Kegel angefertigt. Die Strecke PQ bildet einen Durchmesser des Grundkreises.



Der Punkt L ist der Lotfußpunkt des Punktes S auf der Ebene E. In der folgenden Skizze ist ein Schnittbild des Kegels zusammen mit dem Punkt L dargestellt.



Die Koordinaten des Punktes L werden bestimmt, indem eine Lotgerade l aufgestellt wird, welche den Punkt S enthält und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E als Richtungsvektor besitzt, also

$$l: \vec{x} = \vec{S} + r \cdot \vec{n}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Der Schnittpunkt der Gerade h mit der Ebene E ist der Lotfußpunkt L.

Der Punkt Q ist der Spiegelpunkt von P an L und es gilt:

$$\vec{Q} = \vec{P} + 2 \cdot \overrightarrow{PL}.$$

☞ *Alternative:* Der Punkt Q ist der Spiegelpunkt von P an L und es gilt:

$$\vec{Q} = \vec{L} + \overrightarrow{PL}.$$

Lösung zu Aufgabe 7

In der Urne liegen drei rote, zwei grüne und eine blaue Kugel. Es werden so lange Kugeln gezogen und zur Seite gelegt, bis man eine rote Kugel erhält. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

A : „Man muss höchstens drei Kugeln ziehen, bis die erste rote Kugel gezogen wird."

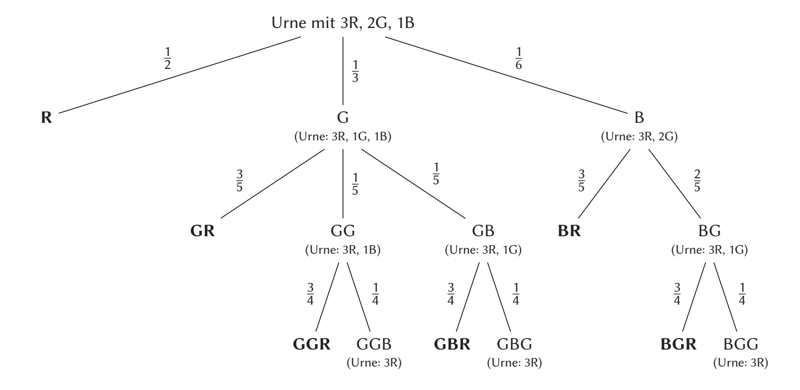
Es gilt: Spätestens die vierte gezogene Kugel ist eine rote Kugel. Damit kann die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens drei Kugeln zieht, berechnet werden als Gegenwahrscheinlichkeit des Ereignisses $\overline{A}$, dass 4 Kugeln gezogen werden müssen. Diese Wahrscheinlichkeit $P(\overline{A})$ kann bestimmt werden als:

$$P(\overline{A}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}.$$

Das Ereignis $\overline{A}$ ist das Gegenereignis zum Ereignis A, und damit ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis gegeben durch:

$$P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}.$$

☞ *Alternative:* Folgendes Baumdiagramm stellt die Situation beim Ziehen der Kugeln aus der Urne dar:



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine rote Kugel in den ersten drei Zügen gezogen wird, kann mithilfe der Pfadregeln des Baumdiagramms bestimmt werden als:

$$P(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{19}{20}.$$

Lösungen

Lösungen zu Analysis, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe A 1.1

a) ➤ *Funktionsgleichung*

Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades hat folgende allgemeine Funktionsgleichung und Ableitungen:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b.$$

Laut Aufgabenstellung hat die Tangente an G_f im Koordinatenursprung die Gleichung $y = 2{,}25x$. Der Punkt $O(0|0)$ liegt also auf dem Graphen und es muss gelten:

$$f(0) = 0.$$

Die Steigung der Tangente im Ursprung entspricht dem Wert der ersten Ableitung von f an der Stelle $x = 0$:

$$f'(0) = 2{,}25.$$

Der Punkt $A(4|1)$ ist ein Wendepunkt von G_f. Somit muss gelten

$$f(4) = 1,$$
$$f''(4) = 0.$$

Diese vier Bedingungen führen in der angeführten Reihenfolge zu folgendem Gleichungssystem:

$$0 = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d$$
$$2{,}25 = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c$$
$$1 = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d$$
$$0 = 6a \cdot 4 + 2b.$$

Aus der ersten Gleichung folgt direkt $d = 0$ und aus der zweiten $c = 2{,}25$. Setzt man beides in die verbleibenden Gleichungen ein, erhält man zwei Gleichungen mit zwei Variablen:

$$\text{(I)} \quad 1 = 64a + 16b + 4 \cdot 2{,}25$$
$$\text{(II)} \quad 0 = 24a + 2b.$$

Damit ergibt sich:

$$\text{(I)} \quad -8 = 64a + 16b$$
$$\text{(II)} \quad 0 = 24a + 2b.$$

Nun wird das lineare Gleichungssystem gelöst:

$$\text{(I)} - 8 \cdot \text{(II)}: \quad -8 = -128a \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Einsetzen von $a = 0{,}0625$ in eine der beiden Gleichungen, z.B. (I), liefert dann:

$$-8 = 64 \cdot 0{,}0625 + 16b, \quad \text{also} \quad b = -\frac{3}{4} = -0{,}75.$$

Die Funktionsgleichung der Funktion f lautet somit

$$f(x) = 0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 2{,}25x.$$

➤ *Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen*

Aus der Aufgabenstellung ist bereits bekannt, dass der Graph durch den Koordinatenursprung geht. Damit ist der Schnittpunkt mit der y-Achse der Punkt $S_y(0|0)$ und dieser auch ein Schnittpunkt mit der x-Achse. Die weiteren Schnittstellen mit der x-Achse erhält man durch Lösen der Gleichung $f(x) = 0$. Dabei lässt sich zunächst ein x ausklammern:

$$0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 2{,}25x = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x(0{,}0625x^2 - 0{,}75x + 2{,}25) = 0.$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt sind die Lösungen dieser Gleichung gegeben durch:

$$x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 0{,}0625x^2 - 0{,}75x + 2{,}25 = 0.$$

Mithilfe der Mitternachtsformel können die Lösungen der quadratischen Gleichung bestimmt werden:

$$x_{2,3} = \frac{-(-0{,}75) \pm \sqrt{(-0{,}75)^2 - 4 \cdot (0{,}0625) \cdot (2{,}25)}}{2 \cdot 0{,}0625} = \frac{0{,}75 \pm \sqrt{0}}{0{,}125} = 6 \pm 0 = 6.$$

Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen sind also gegeben durch:

$$N_1(0|0) = S_y(0|0) \quad \text{und} \quad N_2(6|0).$$

b) (1) Falsch: Der Wert der Ableitungsfunktion f' gibt die Steigung des Graphen der Funktion f an dieser Stelle an. Der Graph G_f hat an der Stelle $x = 4$ eine negative Steigung. Falls die Steigung Null wäre, müsste der Graph G_f an dieser Stelle ein Extremum oder einen Sattelpunkt haben.

(2) Richtig: Wenn der Graph einer Funktion h einen Sattelpunkt besitzt, so hat der Graph der Ableitungsfunktion an dieser Stelle eine doppelte Nullstelle bzw. einen Berührpunkt mit der x-Achse und umgekehrt. Dort liegt sowohl eine Nullstelle als auch ein Extremum vor. Da dies bei G_f der Fall ist, werden die Graphen aller Stammfunktionen F von f an dieser Stelle einen Sattelpunkt aufweisen.

(3) Falsch: Aus dem Verlauf des Graphen von f kann nicht generell auf Nullstellen der Stammfunktionen geschlossen werden. Stammfunktionen sind nur bis auf eine Konstante bestimmt. Es gibt also eine Stammfunktion, deren Graph G_F an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle hat, aber auch beliebig viele andere Stammfunktionen, deren Graphen an dieser Stelle keine Nullstelle haben. Somit haben nicht alle Stammfunktionen bei $x = 2$ eine Nullstelle.

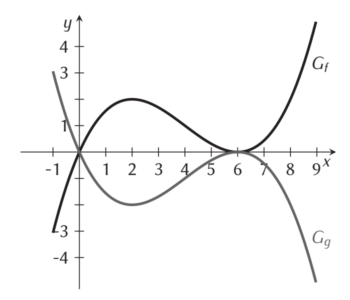
(4) Richtig: Die Funktion f ist dritten Grades, die Ableitungsfunktion f' hat also den Grad 2. Da der Graph G_f bei $x = 4$ einen Wendepunkt mit negativer Steigung aufweist, hat der Graph der Funktion f' dort einen Tiefpunkt. Dieser ist das einzige Extremum. Demnach ist der Graph $G_{f'}$ im Bereich von $-\infty < x < 4$ monoton fallend.

c) Der Graph der Funktion g entsteht aus dem Graphen der Funktion f durch Spiegelung an der x-Achse. Die Funktionsgleichung der Funktion g erhält man dann durch: $g(x) = -f(x)$.

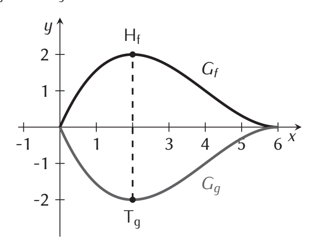
Es gilt also:

$$g(x) = -f(x) = -(0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 2{,}25x) = -0{,}0625x^3 + 0{,}75x^2 - 2{,}25x.$$

Folgende Zeichnung zeigt beide Graphen in einem Koordinatensystem.



Die größte Strecke in Nord-Süd-Richtung ist die Strecke zwischen dem Hochpunkt H_f von G_f und dem Tiefpunkt T_g von G_g.



➤ *Koordinaten von* H_f

Zunächst werden die ersten beiden Ableitungen der Funktion f bestimmt:

$$f'(x) = 0{,}0625 \cdot 3 \cdot x^2 - 0{,}75 \cdot 2 \cdot x + 2{,}25 = 0{,}1875x^2 - 1{,}5x + 2{,}25 \quad \text{und}$$

$$f''(x) = 0{,}1875 \cdot 2 \cdot x - 1{,}5 = 0{,}375x - 1{,}5.$$

Nun werden die Nullstellen von f' bestimmt:

$$0{,}1875x^2 - 1{,}5x + 2{,}25 = 0.$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1{,}5) \pm \sqrt{(-1{,}5)^2 - 4 \cdot 0{,}1875 \cdot 2{,}25}}{2 \cdot 0{,}1875} = \frac{1{,}5 \pm \sqrt{0{,}5625}}{0{,}375} = \frac{1{,}5 \pm 0{,}75}{0{,}375}.$$

Damit sind die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ gegeben durch:

$$x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 6.$$

Mithilfe der zweiten Ableitung wird überprüft, um welche Art von Extremum es sich handelt:

$$f''(2) = 0{,}375 \cdot 2 - 1{,}5 = -0{,}75 < 0 \implies H_f(2|f(2)) \quad \text{und}$$

$$f''(6) = 0{,}375 \cdot 6 - 1{,}5 = 0{,}75 > 0 \implies T_f(6|f(6)).$$

Jetzt wird noch die y-Koordinate des Hochpunktes berechnet:

$$f(2) = 0{,}0625 \cdot 2^3 - 0{,}75 \cdot 2^2 + 2{,}25 \cdot 2 = 2 \implies H_f(2|2)$$

Da die Graphen der Funktionen f und g symmetrisch zur x-Achse sind, kann man den Tiefpunkt der Funktion g direkt angeben: $T_g(2|-2)$. Die gesuchte Strecke ist dann der Abstand zwischen den beiden Punkten.

$$f(2) - g(2) = 2 - (-2) = 4.$$

Da eine Längeneinheit auf der Karte 100 Meter entspricht, hat die längstmögliche Seedurchquerung in Nord-Süd-Richtung eine Länge von 400 m.

☞ *Alternative:* Die Art des Extremums kann auch mit dem Vorzeichenwechselkriterium überprüft werden. Es gelten:

$$f'(0) = 2{,}25 > 0,$$

$$f'(4) = 0{,}1875 \cdot 16 - 1{,}5 \cdot 4 + 2{,}25 = -0{,}75 < 0 \quad \text{und}$$

$$f'(8) = 0{,}1875 \cdot 64 - 1{,}5 \cdot 8 + 2{,}25 = 2{,}25 > 0.$$

Damit hat die Funktion f' an der Stelle $x = 2$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - und somit hat der Graph G_f bei $x = 2$ einen Hochpunkt. An der Stelle $x = 4$ hat die Funktion f' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von - nach +. Damit hat der Graph G_f an dieser Stelle einen Tiefpunkt. Der Hochpunkt von G_f ist damit gegeben durch $H_f(2|f(2))$. Wegen $f(2) = 2$ gilt $H_f(2|2)$.

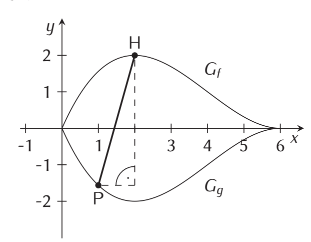
d) ➤ *Länge der Leine*

Die Leine wird an den Punkten $P(1|g(1))$ und $H(2|2)$ befestigt. Zunächst werden die vollständigen Koordinaten von P bestimmt:

$$g(1) = -0{,}0625 \cdot 1^3 + 0{,}75 \cdot 1^2 - 2{,}25 \cdot 1 = -\frac{25}{16} = -1{,}5625, \quad \text{also} \quad P(1|-1{,}5625).$$

Der Abstand L zwischen zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ kann mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden:

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Lösungen

In diesem Fall also:

$$L = \sqrt{(2-1)^2 + (2-(-1{,}5625))^2} = \sqrt{1 + 3{,}5625^2} \approx 3{,}70.$$

Da eine Längeneinheit hundert Metern entspricht, hat die Leine eine Länge von ungefähr 370 m.

☞ *Alternative:* Man könnte auch im Analysisteil Elemente der Analytischen Geometrie verwenden. Der Abstand L der beiden Punkte P und H entspricht dem Betrag des Verbindungsvektors:

$$L = \left|\overrightarrow{PH}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-(-1{,}5625) \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (2+1{,}5625)^2} \approx 3{,}70.$$

Da eine Längeneinheit hundert Metern entspricht, hat die Leine eine Länge von ungefähr 370 m.

➤ *Koordinaten der Bojen*

Es wird also eine Strecke von drei Objekten/Punkten in 4 gleich große Teile zerlegt. Der Mittelpunkt der Strecke teilt sie dabei zunächst in zwei gleichgroße Hälften. Die Mittelpunkte der beiden Teilstrecken teilen diese dann auch wieder in der Mitte.

P B_1 B_2 B_3 H

Um die Koordinaten der mittleren Boje B_2 zu berechnen, bestimmt man also den Mittelpunkt M der Strecke zwischen P und H.

Den Mittelpunkt M einer Strecke zwischen zwei Punkten $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ ist gegeben durch

$$M\left(\frac{1}{2}(x_2+x_1)\middle|\frac{1}{2}(y_1+y_2)\right).$$

Die Koordinaten von B_2 lauten somit:

$$B_2\left(\frac{1}{2}(2+1)\middle|\frac{1}{2}(2-1{,}5625)\right), \quad \text{also} \quad B_2(1{,}5|0{,}21875).$$

Die Boje B_1 befindet sich in der Mitte der Strecke zwischen P und B_2, somit:

$$B_1\left(\frac{1}{2}(1+1{,}5)\middle|\frac{1}{2}(-1{,}5625+0{,}21875)\right), \quad \text{also} \quad B_1(1{,}25|-0{,}671875).$$

Die Boje B_3 befindet sich in der Mitte der Strecke zwischen B_2 und H, somit:

$$B_3\left(\frac{1}{2}(1{,}5+2)\middle|\frac{1}{2}(0{,}21875+2)\right), \quad \text{also} \quad B_3(1{,}75|1{,}109375).$$

☞ *Alternative:* Auch diese Aufgabe lässt sich vektorgeometrisch lösen. Den Ortsvektor zur Boje B_2 kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_2} &= \vec{P} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{PH} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5625 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-(-1{,}5625) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0{,}21875 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Also $B_2(1{,}5|0{,}21875)$. Die anderen Punkte erhält man dann auf die gleiche Art und Weise.

➤ *Winkel zwischen Leine und Ufer*

Gefragt ist hier nach dem Schnittwinkel zwischen dem Graphen der Funktion f und der Geraden durch P und H, welche den Verlauf der Leine beschreibt.

Der Verlauf der Bojenkette kann durch den Graphen G_h einer Geraden h beschrieben werden. Die Funktion h hat eine Funktionsgleichung der Form $h(x) = mx+b$. Die Bojenlinie wird begrenzt durch die Punkte P und H. Für die Steigung $m = h'(x)$ gilt dann:

$$m = \frac{y_H - y_P}{x_H - x_P} = \frac{2+1{,}5625}{2-1} = 3{,}5625.$$

Der Punkt H ist der Schnittpunkt der beiden Funktionen. Weil H ein Maximum von G_f ist, gilt hier $f'(2) = 0$ und G_f besitzt in H eine waagrechte Tangente. Der Schnittwinkel zwischen den Graphen der Funktionen f und h ist der Schnittwinkel der Tangenten in H. Weil die Tangente an G_f in H waagrecht und somit parallel zur x-Achse verläuft, ist der Schnittwinkel α gegeben durch In die Schnittwinkelformel eingesetzt liefert das:

$$m = \tan\alpha \quad \text{und damit} \quad \alpha \approx 74{,}32°.$$

➤ *Flächeninhalt der Gesamtfläche*

Die Gesamtoberfläche des Sees lässt sich als Fläche zwischen den Graphen G_f und G_g im Intervall $[0;6]$ berechnen. Die Fläche zwischen zwei Graphen entspricht dem Wert des Integrals der Differenzfunktion. Hierbei werden die x-Werte der Schnittpunkte als Integralgrenzen verwendet.

$$\begin{aligned}A_{\text{See}} &= \int_0^6 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx \\ &= \int_0^6 \big(0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 2{,}25x - (-0{,}0625x^3 + 0{,}75x^2 - 2{,}25x)\big)\,dx \\ &= \int_0^6 \big(0{,}125x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}5x\big)\,dx.\end{aligned}$$

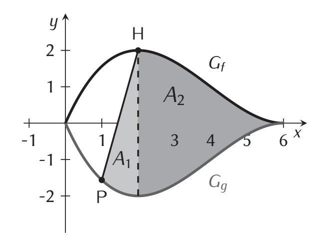
und damit:

$$A_{See} = \left[0{,}125 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 1{,}5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^6$$
$$= \left[0{,}03125x^4 - 0{,}5x^3 + 2{,}25x^2\right]_0^6$$
$$= 0.03125 \cdot 6^4 - 0{,}5 \cdot 6^3 + 2{,}25 \cdot 6^2 - (0{,}03125 \cdot 0^4 - 0{,}5 \cdot 0^3 + 2{,}25 \cdot 0^2)$$
$$= 13{,}5.$$

Die Gesamtfläche des Sees beträgt also 13,5 Flächeneinheiten. Eine Längeneinheit entspricht 100 m, damit entspricht eine Flächeneinheit 1 ha. Der See hat also eine Gesamtfläche von 13,5 ha.

➤ *Flächeninhalt der Schwimmfläche*

Zunächst verdeutlicht eine Skizze, welche Fläche dem Schwimmbereich entspricht.



Die Fläche des Schwimmbereichs A_S lässt sich, wie im Schaubild zu erkennen, in zwei Teilflächen unterteilen. Die Fläche A_1 ist dabei die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen h, also der Bojenkette, und g im Intervall $[1; 2]$. Die Fläche A_2 ist die Fläche zwischen den Graphen von f und g im Intervall $[2; 6]$. Somit ergibt sich für den Schwimmbereich:

$$A_S = A_1 + A_2$$
$$= \int_1^2 \big(h(x) - g(x)\big)\,dx + \int_2^6 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx.$$

Die Fläche A_2 lässt sich analog zu oben, nur mit veränderter unterer Grenze, direkt berechnen:

$$A_2 = \int_2^6 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$
$$= \int_2^6 \big(0{,}125x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}5x\big)\,dx$$
$$= \left[0{,}125 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 1{,}5 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 4{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2\right]_2^6$$
$$= \left[0{,}03125x^4 - 0{,}5x^3 + 2{,}25x^2\right]_2^6$$
$$= 0.03125 \cdot 6^4 - 0{,}5 \cdot 6^3 + 2{,}25 \cdot 6^2 - (0{,}03125 \cdot 2^4 - 0{,}5 \cdot 2^3 + 2{,}25 \cdot 2^2)$$
$$= 8.$$

Für die Fläche A_1 muss zunächst die Funktionsgleichung der Bojenleinenfunktion h ermittelt werden. Dabei handelt es sich, wie aus der vorangegangenen Teilaufgabe bekannt, um eine lineare Funktion. Es gilt also

$$h(x) = mx + b,$$

wobei in der vorigen Aufgabe auch schon ermittelt wurde, dass gilt $m = 3{,}5625$. Um den y-Achsenabschnitt b auszurechnen, wird nun eine Punktprobe mit H durchgeführt:

$$2 = 3{,}5625 \cdot 2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -\frac{41}{8} = -5{,}125.$$

Somit hat die Bojenlinie folgende Funktionsgleichung

$$h(x) = 3{,}5625x - 5{,}125.$$

Damit kann die Fläche A_1 nun berechnet werden:

$$A_1 = \int_1^2 \big(h(x) - g(x)\big)\,dx$$
$$= \int_1^2 \big(3{,}5625x - 5{,}125 - (-0{,}0625x^3 + 0{,}75x^2 - 2{,}25x)\big)\,dx$$
$$= \int_1^2 \big(0{,}0625x^3 - 0{,}75x^2 + 5{,}8125x - 5{,}125\big)\,dx$$
$$= \left[0{,}0625 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - 0{,}75 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 + 5{,}8125 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - 5{,}125 \cdot x\right]_1^2$$
$$= \left[0{,}015625x^4 - 0{,}25x^3 + 2{,}90625x^2 - 5{,}125x\right]_1^2$$
$$= 0{,}015625 \cdot 2^4 - 0{,}25 \cdot 2^3 + 2{,}90625 \cdot 2^2 - 5{,}125 \cdot 2$$
$$- (0{,}015625 \cdot 1^4 - 0{,}25 \cdot 1^3 + 2{,}90625 \cdot 1^2 - 5{,}125 \cdot 1)$$
$$= 2{,}078125.$$

Für den Flächeninhalt der Schwimmfläche A_S gilt also:

$$A_S = A_1 + A_2 = 8 + 2{,}078125 = 10{,}078125.$$

Damit beträgt der Flächeninhalt der Schwimmfläche ungefähr 10,07 ha.

➤ *Anteil der Schwimmfläche an der Gesamtfläche*

Der Anteil der Schwimmfläche an der Gesamtfläche ist gegeben durch:

$$p = \frac{10{,}078125}{13{,}5} \approx 0{,}7465.$$

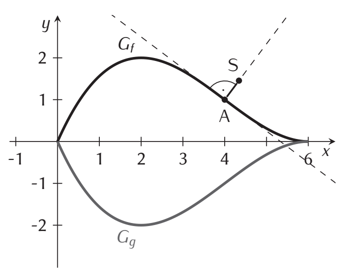
Der Anteil der für Schwimmer zugelassenen Fläche des Sees beträgt also etwa 75 %.

Lösungen

e) ➤ *Zeichnung*

Zunächst wird zusätzlich zu den Graphen G_f und G_g der Aufsichtsturm im Punkt A eingezeichnet. Die Station der Badeaufsicht S ist 50 Meter vom Ufer entfernt, dies entspricht 0,5 Längeneinheiten, und auf kürzestem Weg mit dem Aufsichtsturm verbunden. Der Weg zwischen Station und Aufsichtsturm muss dann senkrecht auf der Tangente an den Graphen G_f am Aufsichtsturm stehen.

Somit ergibt sich folgende Skizze.



➤ *Gleichung des Rettungsweges*

Eben wurde begründet, dass die Station auf der Normalen an den Graphen G_f im Punkt A liegen muss. Um die Steigung der Normalen m_N in A zu bestimmen, benötigt man zunächst die Steigung m_T der Tangente in A. Es gilt:

$$m_T = f'(4) = 0{,}1875 \cdot 4^2 - 1{,}5 \cdot 4 + 2{,}25 = -0{,}75 = -\frac{3}{4}.$$

Die Steigung der Normalen erhält man dann mit der Formel $m_N = -\frac{1}{m_T}$:

$$m_N = -\frac{1}{-0{,}75} = \frac{4}{3}.$$

Den y-Achsenabschnitt der Normalen erhält man, indem man nun in die allgemeine Geradengleichung $y = mx + b$ die errechnete Steigung und die Koordinaten von A einsetzt:

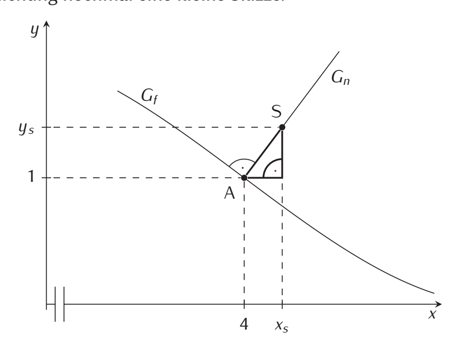
$$1 = \frac{4}{3} \cdot 4 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -\frac{13}{3}.$$

Die Gleichung der Normalen, die den Rettungsweg beschreibt, lautet somit:

$$n(x) = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}.$$

➤ *Koordinaten der Station* S

Zur Veranschaulichung nochmal eine kleine Skizze.



Das Steigungsdreieck zwischen den Punkten A(4|1) und S($x_S|y_S$) ist ein rechtwinkliges Dreieck. Eine Kathete hat die Länge $x_S - 4$ und die andere Kathete hat die Länge $y_S - 1$. Der Abstand des Aufsichtsturmes vom Ufer beträgt 50 m, das entspricht 0,5 Längeneinheiten. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich folgender Ansatz:

$$0{,}5^2 = (x_S - 4)^2 + (y_S - 1)^2.$$

Da der Punkt S auf der Normalen liegt, gilt für die y-Koordinate:

$$y_S = \frac{4}{3}x_S - \frac{13}{3}.$$

Somit muss nun folgende Gleichung nach x_S aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
0{,}5^2 &= (x_S - 4)^2 + \left(\frac{4}{3}x_S - \frac{13}{3} - 1\right)^2\\
0{,}25 &= (x_S - 4)^2 + \left(\frac{4}{3}x_S - \frac{16}{3}\right)^2\\
0{,}25 &= x_S^2 - 8x_S + 16 + \frac{16}{9}x_S^2 - \frac{128}{9}x_S + \frac{256}{9}\\
0{,}25 &= \frac{25}{9}x_S^2 - \frac{200}{9}x_S + \frac{400}{9}\\
0 &= \frac{25}{9}x_S^2 - \frac{200}{9}x_S + \frac{1591}{36}\\
0 &= 100x_S^2 - 800x_S + 1591
\end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung können mit der Mitternachtsformel bestimmt werden:

$$x_{1,2} = -\frac{-(-800) \pm \sqrt{(-800)^2 - 4 \cdot 100 \cdot 1591}}{200} = 4 \pm \frac{3}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_{S_1} = 4{,}3 \quad \text{und} \quad x_{S_2} = 3{,}7.$$

Relevant ist in diesem Kontext nur $x_{S_1} = 4{,}3$. Für $x_{S_2} = 3{,}7$ läge die Wasserrettungsstation mitten im See.

Mit der Gleichung der Normalen berechnet man dann noch die y-Koordinate der Station:

$$y_S = n(4{,}3) = \frac{4}{3} \cdot 4{,}3 - \frac{13}{3} = 1{,}4$$

Somit befindet sich die Station im Punkt S(4,3|1,4).

Lösung zu Aufgabe A 1.2

a) Januar ist der Beginn des Beobachtungszeitraumes, also der Zeitpunkt $t = 0$. Somit muss die Gleichung die Bedingung $B(0) = 100$ erfüllen. Anfang Mai sind 4 Monate seit Beobachtungsbeginn vergangen, also muss gelten $B(4) = 150$. Somit:

(I) $100 = ae^{b \cdot 0} = ae^0 = a \quad \Longleftrightarrow \quad a = 100$ und

(II) $150 = ae^{b \cdot 4}$.

Lösungen

Da die erste Gleichung (I) direkt den Wert für a liefert, kann man diesen nun in Gleichung (II) einsetzen und b berechnen:

$$150 = 100e^{4b}$$
$$\frac{150}{100} = e^{4b}$$
$$\ln 1{,}5 = \ln\left(e^{4b}\right)$$
$$\ln 1{,}5 = 4b$$
$$\frac{\ln 1{,}5}{4} = b$$
$$\Longrightarrow \quad b \approx 0{,}10.$$

Somit lautet die gesuchte Funktionsgleichung $B(t) = 100e^{0,1t}$.

b) Der Monat März des aktuellen Jahres entspricht $t = 14$ und es gilt:

$$B(14) = 100 \cdot e^{0,1\cdot 14} = 100 \cdot e^{1,4} \approx 405{,}5.$$

Der Forellenbestand im März des aktuellen Jahres beträgt etwa 406 Fische.

c) Der Nachbarverein wird die Forellen verkaufen, wenn 600 Forellen in den künstlichen Teichen sind. Denn dann können 300 Forellen verkauft werden und 300 bleiben im eigenen Bestand. Gesucht ist also der Zeitpunkt t, an dem die Forellenzahl $B(t) = 600$ ist:

$$600 = 100e^{0,1t}$$
$$6 = e^{0,1t}$$
$$\ln 6 = \ln\left(e^{0,1t}\right)$$
$$\ln 6 = 0{,}1t$$
$$\frac{\ln 6}{0{,}1} = t$$
$$t \approx 17{,}92.$$

Nach diesem Modell werden ungefähr 18 Monate nach Beobachtungsbeginn die Fische verkauft. Dies entspricht dem Juli diesen Jahres.

Die Funktionsgleichung beschreibt ein exponentielles Wachstum. Die Anzahl der Fische würde in diesem Modell also stets zunehmen. Allerdings ist die Anzahl der Fische sowohl durch das begrenzte Nahrungsangebot als auch das begrenzte Platzangebot beschränkt.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe A 2.1

a) Die Funktion f beschreibt die Änderungsrate der Temperatur des Stahlstückes.

➤ *Abkühlgeschwindigkeit nach einer Minute*

Um zu bestimmen, wie schnell das Stahlstück nach einer Minute abkühlt, genügt es also den Funktionswert der Funktion f an der Stelle $t = 1$ zu berechnen. Es gilt:

$$f(1) = -11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot 1\right)$$
$$= -11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80}\right)$$
$$\approx -36{,}1.$$

Das Hufeisen kühlt eine Minute nach dem Herausziehen aus der Esse mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 36,1 °C/min ab.

➤ *Durchschnittliche Abkühlgeschwindigkeit in den ersten 20 Minuten*

Zunächst wird bestimmt, wie stark das Stahlstück in den ersten 20 Minuten abkühlt. Die Funktion f beschreibt die Änderungsrate der Temperatur. Die Temperaturdifferenz T des Stahlstückes in den ersten 20 Minuten ist dann gegeben durch:

$$T = \int_0^{20} f(t)\,dt$$
$$= \int_0^{20} -11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right)\,dt$$
$$= \left[-920 \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right)\right]_0^{20}$$
$$= -460\sqrt{2}$$
$$\approx -650{,}54.$$

Das Hufeisen kühlt in den ersten 20 Minuten nach dem Herausziehen aus der Esse ungefähr 650,54 °C ab. Die durchschnittliche Abkühlgeschwindigkeit $\overline{T}$ in den ersten 20 Minuten ist damit gegeben durch:

$$\overline{T} = \frac{-460\sqrt{2}}{20} \approx -32{,}53.$$

Das Hufeisen kühlt also in den ersten 20 Minuten um durchschnittlich ungefähr 32,53 °C/min ab.

➤ *Zeitpunkt, an dem das Stahlstück mit* 20 °C/min *abkühlt*

Die Funktion f beschreibt die Abkühlgeschwindigkeit des Stahlstückes. Gesucht sind daher die Lösungen der Gleichung

$$f(t) = -20 \iff -11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = -20 \iff \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = \frac{40}{23 \cdot \pi}.$$

Die Funktion f beschreibt die Änderungsrate der Temperatur in den ersten 40 Minuten, es muss daher gelten

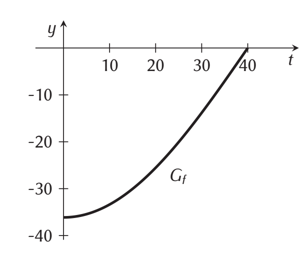
$$0 \leq t \leq 40$$

und die Lösung der Gleichung ist damit gegeben durch:

$$t \approx 25{,}06.$$

Das Stahlstück kühlt also ungefähr 25,06 min nach Herausziehen aus der Esse mit einer Geschwindigkeit von 20 °C/min ab.

b) Im folgenden Schaubild ist der Graph von f im angegebenen Zeitraum dargestellt.



c) Um zu bestimmen, wann der Stahl am schnellsten beziehungsweise am langsamsten abkühlt, werden die Extrempunkte des Graphen von f bestimmt.

➤ *Ableitungen von f*

Es gelten:

$$f'(t) = 11{,}5\pi \cdot \frac{\pi}{80} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = \frac{23}{160}\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right)$$
$$f''(t) = \frac{23}{160}\pi^2 \cdot \frac{\pi}{80} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = \frac{23}{12800}\pi^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right)$$

➤ *Extrempunkte*

Die Nullstellen der ersten Ableitung werden bestimmt. Es gilt:

$$f'(t) = 0 \iff \frac{23}{160}\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = 0$$
$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = 0.$$

Diese Gleichung hat im Bereich $0 \leq t \leq 40$ genau eine Lösung:

$$t = 0.$$

Es gilt:

$$f''(0) = \frac{23}{12800}\pi^3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot 0\right) = \frac{23}{12800}\pi^3 > 0.$$

Der Graph der Funktion f hat damit an der Stelle $t = 0$ ein Minimum:

$$f(0) = \text{-}11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot 0\right) \approx 36{,}13.$$

Die Temperaturdifferenz ist damit zu diesem Zeitpunkt am größten und das Stahlstück kühlt zum Zeitpunkt des Herausziehens aus der Esse am schnellsten ab.

Nun ist noch der Zeitpunkt gesucht, an dem das Stahlstück am langsamsten abkühlt. Einen weiteren Extrempunkt hat der Graph im Bereich $0 \leq t \leq 40$ nicht mehr. Der Graph ist monoton steigend. Damit kühlt das Stahlstück mit voranschreitender Zeit immer langsamer ab und der Zeitpunkt, an dem das Stahlstück am langsamsten abkühlt, ist gegeben durch:

$$t = 40.$$

Hier gilt:

$$f(40) = \text{-}11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot 40\right) = \text{-}11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Das Stahlstück kühlt also zum Zeitpunkt des Herausziehens aus der Esse am schnellsten ab, und zwar ungefähr 36,13 °C/min. Genau 40 Minuten später kühlt es am langsamsten ab, genauer gesagt gar nicht mehr, also um 0 °C/min.

d) ➤ *Funktionsterm für die Temperatur*

Die Funktion f beschreibt also die Änderungsrate der Temperatur des Stahlstückes. Somit kann die Temperatur T des Stahlstückes zum Zeitpunkt t durch eine Stammfunktion von f beschrieben werden. Zunächst wird eine Stammfunktion F von f bestimmt. Es gilt:

$$F(t) = \int f(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int \text{-}11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right)\,\mathrm{d}t$$
$$= \text{-}11{,}5\pi \cdot \frac{80}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) + c$$
$$= \text{-}920 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) + c.$$

Es gibt also eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, sodass für die Temperatur $T(t)$ des Stahlstückes zum Zeitpunkt t gilt:

$$T(t) = F(t) + c.$$

Zum Zeitpunkt des Herausziehens aus der Esse, also bei $t = 0$, hat das Stahlstück eine Temperatur von 950 °C. Es gilt also:

$$T(0) = 950.$$

Die Temperatur T des Stahlstückes kann also beschrieben werden durch die Funktion:

$$T(t) = 950 - 920 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right), \quad 0 \leq t \leq 40.$$

➤ *Zeitraum, den der Schmied für das Formen zur Verfügung hat*

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$T(t) = 750 \iff 950 - 920 \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = 750$$
$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = \frac{200}{920}.$$

Lösungen

Die Lösung dieser Gleichung im Bereich $0 \leq t \leq 40$ ist gegeben durch:

$$t \approx 5{,}58.$$

Der Schmied hat also in etwa 5 Minuten und 35 Sekunden Zeit, das Eisen zu formen.

➤ *Bestimmung der Raumtemperatur*

Dem Aufgabentext kann entnommen werden, dass das Stahlstück 40 Minuten nach dem Herausziehen aus der Esse Umgebungstemperatur angenommen hat. Es gilt:

$$\begin{aligned} T(40) &= 950 - 920 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot 40\right) \\ &= 950 - 920 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 30. \end{aligned}$$

Die Raumtemperatur des Schmiederaumes beträgt damit 30 °C.

e) Gesucht ist eine Sinusfunktion g, sodass gilt:

$$f(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 40.$$

Für die Funktion f gilt:

$$f(t) = -11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot t\right) = 11{,}5\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{80} \cdot (t - 80)\right).$$

Die Funktion f ist eine Cosinusfunktion mit folgenden Eigenschaften:

- Amplitude $a = 11{,}5\pi$,
- Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{80}} = 160$,
- Phasenverschiebung auf der x-Achse: $c = 80$,
- Verschiebung in y-Richtung: $d = 0$.

Für eine Sinusfunktion g mit $g(t) = f(t)$ muss ebenfalls gelten:

- Amplitude $a = 11{,}5\pi$,
- Periodenlänge $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{80}} = 160$,
- Verschiebung in y-Richtung: $d = 0$.

Für die Funktion g gilt also

$$g(t) = 11{,}5\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot (t - c)\right).$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = 0$ einen Tiefpunkt. Der Graph von g muss daher an dieser Stelle auch einen Tiefpunkt haben. Die Phasenverschiebung auf der x-Achse muss damit $c = 40$ sein. Also ist die Funktion g mit

$$g(t) = 11{,}5\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot (t - 40)\right)$$

eine Sinusfunktion, für die gilt:

$$f(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 40.$$

☞ *Alternative:* Die Phasenverschiebung auf der x-Achse muss damit $c = -120$ sein. Also ist die Funktion g mit

$$g(t) = 11{,}5\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi}{80} \cdot (t + 120)\right)$$

eine Sinusfunktion, für die gilt:

$$f(t) = g(t), \quad 0 \leq t \leq 40.$$

Lösung zu Aufgabe A 2.2

a) ➤ *Funktionsterm der Temperatur des Hufeisens im Wasserbad*

Das Hufeisen wird 10 Minuten nach Herausnehmen aus der Esse in ein Wasserbad getaucht und seine Temperatur nimmt ab diesem Zeitpunkt um 50 °C/min ab. Zum Zeitpunkt des Eintauchens in das Wasserbad hat das Hufeisen eine Temperatur von 600 °C. Für die Funktion g, welche die Temperatur des Hufeisens in °C nach Eintauchen in das Wasserbad beschreibt, müssen damit folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$g(0) = 600 \quad \text{und} \quad g'(t) = -50$$

Die Funktion g ist nach Aufgabenstellung eine lineare Funktion. Ein Ansatz für eine Funktionsgleichung von g ist gegeben durch:

$$g(t) = m \cdot t + c.$$

Mit den obigen Bedingungen kann nun der Funktionsterm für g bestimmt werden und es gilt:

$$g(t) = -50t + 600.$$

➤ *Zeitpunkt, an welchem das Hufeisen eine Temperatur von* 30 °C *hat*

Gesucht ist die Lösung der folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} g(t) = 30 \quad &\iff \quad -50t + 600 = 30 \\ &\iff \quad t = \frac{57}{5} = 11{,}4 \end{aligned}$$

Nach dem Eintauchen in das Wasserbad dauert es 11 Minuten und 24 Sekunden bis das Hufeisen eine Temperatur von 30 °C besitzt.

b) ➤ *Temperaturdifferenz*

Das Eisen hat direkt nach dem Herausziehen aus der Esse eine Temperatur von 950 °C. Am Ende des Abkühlvorganges hat es eine Temperatur von 30 °C. Insgesamt ist die Temperaturdifferenz gegeben durch:

$$\Delta T = 950 - 30 = 920.$$

➤ *Zeitbedarf*

Außerhalb der Esse und außerhalb des Wasserbades kühlt das Eisen 10 min lang ab. Im Wasserbad benötigt das Eisen 11,4 min um auf eine Temperatur von 30 °C abzukühlen. Dies entspricht einer Gesamtzeit von 21,4 min.

➤ *Durchschnittliche Abkühlgeschwindigkeit*

Damit kann die durchschnittliche Abkühlgeschwindigkeit $\overline{T_1}$ bestimmt werden:

$$\overline{T_1} = \frac{920}{21{,}4} = \frac{4600}{107} \approx 42{,}99.$$

Das Eisen kühlt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von ungefähr 43 °C/min ab.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe A 1.1

a) ➤ *Ableitungen*

Für die ersten drei Ableitungen von f gelten:

$$f'(t) = 6000e^{-0{,}5t} - 3000te^{-0{,}5t},$$
$$f''(t) = -3000e^{-0{,}5t} - \left(3000e^{-0{,}5t} - 1500te^{-0{,}5t}\right) = -6000e^{-0{,}5t} + 1500te^{-0{,}5t},$$
$$f''(t) = 3000e^{-0{,}5t} + \left(1500e^{-0{,}5t} - 750te^{-0{,}5t}\right) = 4500e^{-0{,}5t} - 750te^{-0{,}5t}.$$

➤ *Maximale Änderungsrate*

Die Funktion f beschreibt die momentane Änderungsrate der App-Käufer. Die maximale momentane Änderungsrate entspricht dem Maximum der Funktion f.

Nun werden die Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 \quad &\iff \quad 6000e^{-0{,}5t} - 3000te^{-0{,}5t} = 0 \\ &\iff \quad 6000e^{-0{,}5t} = 3000te^{-0{,}5t} \\ &\iff \quad 6000 = 3000t \\ &\iff \quad t = 2. \end{aligned}$$

Nun wird untersucht, ob der Graph der Funktion f an der Stelle $t = 2$ einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt besitzt. Es gilt:

$$f''(2) = -6000e^{-0{,}5\cdot 2} + 1500 \cdot 2 \cdot e^{-0{,}5\cdot 2} = -6000e^{-1} + 3000e^{-1} = -3000e^{-1} < 0.$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt. Es gilt:

$$f(2) = 6000 \cdot 2 \cdot e^{-0{,}5t} = 12000e^{-1} \approx 4414{,}6.$$

In den ersten zwölf Monaten kaufen maximal ungefähr 4414,6 Kunden pro Monat die App. Dies ist zwei Monate nach Einführung der Fall.

➤ *Änderungsrate größer als 4000 Kunden pro Monat*

Die Funktion f beschreibt die momentane Änderungsrate der App-Käufer. Gesucht sind also die Lösungen der folgenden Gleichung:

$$6000te^{-0{,}5t} = 4000.$$

Mithilfe des GTR erhält man:

$$t_1 \approx 1{,}20 \quad \text{und} \quad t_2 \approx 3{,}02.$$

Die momentane Änderungsrate der Käufer beträgt ungefähr 1,20 Monate und 3,02 Monate nach Einführung genau 4000 Käufer pro Monat. Genau zwei Monate nach Einführung ist die Anzahl der Käufer maximal, damit ist die momentane Änderungsrate im Zeitraum zwischen 1,20 Monate und 3,02 Monate nach Einführung größer als 4000 Käufer pro Monat.

➤ *Stärkste Abnahme oder Zunahme der Änderungsrate*

Gesucht sind die Wendepunkte des Graphen von f. Man bestimmt zunächst die Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} f''(t) = 0 \quad &\iff \quad -6000e^{-0,5t} + 1500te^{-0,5t} = 0 \\ &\iff \quad 6000e^{-0,5t} = 1500te^{-0,5t} \\ &\iff \quad 6000 = 1500t \\ &\iff \quad t = 4. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$f''(4) = 4500e^{-0,5\cdot 4} - 750 \cdot 4 \cdot e^{-0,5\cdot 4} = 1500e^{-2} \neq 0.$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt. Die Abnahme beziehungsweise Zunahme der Änderungsrate beträgt an dieser Stelle:

$$f'(4) = 6000e^{-0,5\cdot 4} - 3000 \cdot 4 \cdot e^{-0,5\cdot 4} = -6000e^{-2} \approx -812{,}01.$$

Die Funktion f wird betrachtet für $t \in [0; 12]$, die Randwerte $t = 0$ und $t = 12$ müssen also auch betrachtet werden. Es gelten:

$$f'(0) = 6000e^{-0,5\cdot 0} - 3000 \cdot 0 \cdot e^{-0,5\cdot 0} = 6000 \cdot e^{0} = 6000,$$
$$f'(12) = 6000e^{-0,5\cdot 12} - 3000 \cdot 12 \cdot e^{-0,5\cdot 12} = -30000 \cdot e^{-6} = -74{,}36.$$

Die Änderungsrate nimmt also für $t = 0$ am stärksten zu und für $t = 4$ am stärksten ab.

b) ➤ *Monotonie für $t > 2$*

Die Ableitung f' der Funktion f ist gegeben durch:

$$f'(t) = 6000e^{-0,5t} - 3000te^{-0,5t}.$$

Es gilt:

$$f'(t) = 3000e^{-0,5t}(2 - t).$$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{-0,5t} > 0,$$

für $t > 2$ zusätzlich

$$2 - t < 0$$

und damit:

$$f'(t) = 3000e^{-0,5t}(2 - t) < 0.$$

Damit gilt für $t > 2$:

$$f'(t) = e^{-0,5t} \cdot (6000 - 3000t) < 0.$$

Folglich ist der Graph der Funktion f streng monoton fallend für $t > 2$.

➤ *Die Funktion nimmt nur positive Werte an*

Die Funktion f ist definiert als

$$f(t) = 6000te^{-0,5t}.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{-0,5t} > 0$$

und für $t > 0$ gilt zusätzlich:

$$6000t > 0.$$

Damit gilt für $t > 0$

$$f(t) = 6000te^{-0,5t} > 0.$$

Die Funktion nimmt für $t > 0$ nur positive Werte an.

➤ *Interpretation*

Es gibt stets neue Käufer für die App, die Anzahl der Käufer nimmt aber zwei Monate nach Markteinführung der App kontinuierlich ab.

c) ➤ *Gesamtzahl der Käufer nach 6 Monaten*

Die Funktion f beschreibt die Anzahl der Käufer pro Monat. Die Gesamtzahl K der Käufer sechs Monate nach Markteinführung ist damit gegeben durch:

$$K = \int_0^6 f(t)\,dt = \int_0^6 6000te^{-0,5t}\,dt$$

Mithilfe eines GTR kann das Integral berechnet werden und es gilt:

$$K \approx 19220.$$

Insgesamt gab es im ersten halben Jahr ungefähr 19220 Käufer für die App.

➤ *Zeitraum von 2 Monaten, in dem es 5000 neue Käufer gibt*

Gesucht ist dasjenige t_0 für das gilt:

$$\int_{t_0}^{t_0+2} f(t)\,dt = 5000.$$

Mithilfe eines GTR erhält man: $t \approx 4$. Im Zeitraum zwischen 4 und 6 Monaten nach Einführung der App gibt es 5000 neue Käufer.

d) Die Käuferzahlen einer weiteren App sollen mithilfe einer Funktion h modelliert werden. Dabei wird angenommen, dass sich die App gemäß dem Gesetz des beschränkten Wachstums entwickelt. Für eine Funktion B, welche beschränktes Wachstum beschreibt, gilt:

$$B(t) = S + (B_0 - S)e^{-kt},$$

wobei B_0 den Anfangsbestand, S die obere Schranke und k die Wachstumskonstante darstellt. Man erwartet maximal 30 000 Käufer für die App, es gilt also:

$$S = 30000.$$

Zum Zeitpunkt der Markteinführung gibt es noch keinen Käufer und damit:

$$B_0 = 0.$$

Die Funktion h, welche die Anzahl der Käufer für die App beschreibt, hat also folgende Gestalt:

$$h(t) = 30000 + (0 - 30000)e^{-kt} = 30000 - 300000e^{-kt}.$$

Sechs Monate nach Einführung der App hat diese bereits 20 000 Käufer. Es gilt also:

$$\begin{aligned} h(6) = 20000 \quad &\Longleftrightarrow \quad 30000 - 300000e^{-6k} = 20000 \\ &\Longleftrightarrow \quad -300000e^{-6k} = -10000 \\ &\Longleftrightarrow \quad e^{-6k} = \frac{1}{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad -6k = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad -6k = -\ln(3) \\ &\Longleftrightarrow \quad k = \frac{1}{6} \cdot \ln(3). \end{aligned}$$

Die Käuferzahlen der App entwickeln sich gemäß der Funktion h mit

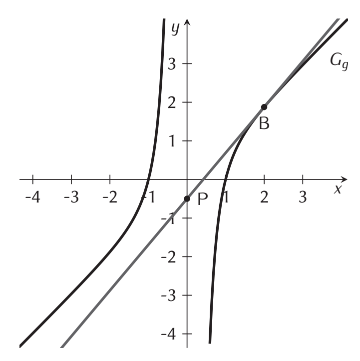
$$h(t) = 30000 - 30000e^{-\frac{1}{6}\ln(3)\cdot t} \approx 30000 - 30000e^{-0,183t}.$$

Lösung zu Aufgabe A 1.2

a) Die Funktion g ist gegeben durch

$$g(x) = x - \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0,$$

und die Koordinaten des Punktes $\mathrm{P}(0|-0{,}5)$. Der Punkt P liegt nicht auf dem Graphen von g, weil die Funktion g an der Stelle $x = 0$ eine Definitionslücke besitzt. Die Tangenten an den Graphen von g im Punkt B verläuft durch den Punkt P wie im folgenden Schaubild dargestellt.



Die Koordinaten des Punktes B sind unbekannt. Eine Gleichung für eine Tangente an den Graphen von g im Punkt $\mathrm{B}(u|g(u))$ ist gegeben durch:

$$y = g'(u)\,(x - u) + g(u).$$

Es gilt also:

$$y = \left(1 + \frac{3}{u^4}\right) \cdot (x - u) + u - \frac{1}{u^3}.$$

Der Punkt P liegt auf der Tangente, deshalb kann eine Punktprobe mit P durchgeführt werden:

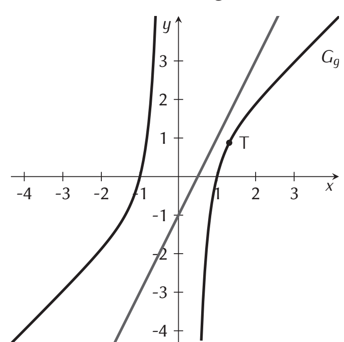
$$\begin{aligned} &-0{,}5 = \left(1 + \frac{3}{u^4}\right) \cdot (0 - u) + u - \frac{1}{u^3} \\ \Longleftrightarrow \quad &-0{,}5 = -u - \frac{3}{u^3} + u - \frac{1}{u^3} \\ \Longleftrightarrow \quad &-0{,}5 = -\frac{4}{u^3} \\ \Longleftrightarrow \quad &u^3 = 8 \\ \Longleftrightarrow \quad &u = 2 \end{aligned}$$

Wegen

$$g(2) = 2 - \frac{1}{2^3} = \frac{15}{8}$$

lauten die Koordinaten des Punktes B mit den geforderten Eigenschaften $\mathrm{B}\left(2\middle|\frac{15}{8}\right)$.

b) Im folgenden Schaubild wird der Sachverhalt dargestellt.



Gesucht ist die x-Koordinate des Punktes $\mathrm{T}(x_\mathrm{T}|y_\mathrm{T})$, welcher auf dem Graphen von g liegt und von diesem den kleinsten Abstand zur Gerade $y = 2x - 1$ besitzt. Die Tangente an den Graphen von g im Punkt T hat deshalb dieselbe Steigung wie die Gerade $y = 2x - 1$, also muss gelten:

$$\begin{aligned} g'(x_\mathrm{T}) = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 + \frac{3}{x_\mathrm{T}^4} = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_\mathrm{T} = \pm\sqrt[4]{3}. \end{aligned}$$

Aus dem Schaubild kann abgelesen werden, dass lediglich $x_\mathrm{T} = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}32$ eine Lösung ist.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe A 2.1

a) Zunächst werden die ersten drei Ableitungen der Funktion z bestimmt. Es gelten:

$$z'(t) = 20 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = \frac{5\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right),$$

$$z''(t) = \frac{5\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right),$$

$$z'''(t) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = -\frac{5\pi^3}{432} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right).$$

➤ *Minimale Zuflussrate in den ersten 24 Stunden*

Gesucht ist der Tiefpunkt des Graphen von z. Hierzu werden für $t \in [0; 24]$ die Lösungen der Gleichung $z(t) = 0$ bestimmt, also:

$$z'(t) = 0 \iff \frac{5\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = 0$$

$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = 0$$

$$\iff \frac{\pi}{12} t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\iff t_1 = 6 \quad \text{und} \quad t_2 = 18.$$

Nun muss untersucht werden, ob es sich um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt. Es gelten:

$$z''(6) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi^2}{36} < 0,$$

$$z''(18) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 18\right) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{5\pi^2}{36} > 0.$$

Damit hat der Graph von z an der Stelle $t = 6$ einen Hochpunkt und an der Stelle $t = 18$ einen Tiefpunkt. Es gilt:

$$z(18) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 18\right) + 25 = 20 \cdot \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 25 = -20 + 25 = 5.$$

Die minimale Zuflussrate liegt damit bei 5000 m^3/h.

➤ *Zeitraum in den ersten 24 Stunden, in welchem die Wassermenge im Stausee abnimmt*

Die Funktion z beschreibt die Zuflussmenge und die Funktion a beschreibt die Abflussmenge des Wassers in den Stausee. Die Wassermenge im Stausee nimmt immer dann ab, wenn die Zuflussmenge kleiner ist als die Abflussmenge. Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$z(t) < a(t) \quad \text{oder} \quad z(t) - a(t) < 0.$$

Zunächst werden diejenigen Zeitpunkte bestimmt, in denen

$$z(t) = a(t)$$

gilt, also

$$20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25 = 19 \iff 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = -6$$

$$\iff \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = -\frac{3}{10}$$

Mithilfe eines GTR lassen sich die Lösungen dieser Gleichung mit $t \in [0; 24]$ bestimmen:

$$t_1 \approx 13{,}16 \quad \text{und} \quad t_2 \approx 22{,}84.$$

Der Graph der Funktion z hat an der Stelle $t = 6$ einen Hochpunkt und an der Stelle $t = 18$ einen Tiefpunkt. Die Funktion a ist konstant. Die Änderungsrate der Wassermenge des Stausees kann beschrieben werden durch die Funktion h mit

$$h(t) = z(t) - a(t).$$

Die Wassermenge nimmt daher zum Zeitpunkt $t = 6$ am meisten zu und zum Zeitpunkt $t = 18$ am meisten ab. Damit nimmt sie im Zeitraum zwischen 13,16 Stunden und 22,84 Stunden nach Beobachtungsbeginn ab.

➤ *Maximale momentane Änderungsrate in den ersten 24 Stunden*

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge kann beschrieben werden durch die Ableitung der Funktion h mit

$$h(t) = z(t) - a(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 25 - 19 = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6.$$

Also

$$h'(t) = \frac{5\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right),$$

$$h''(t) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right).$$

Gesucht ist der Hochpunkt des Graphen von h, also die Lösungen der Gleichung

$$h'(t) = 0 \iff \frac{5\pi}{3} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) = 0 \iff$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind wieder gegeben durch:

$$t_1 = 6 \quad \text{und} \quad t_2 = 18.$$

Es gelten:

$$h''(6) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{5\pi^2}{36} < 0,$$

$$h''(18) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 18\right) = -\frac{5\pi^2}{36} \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{5\pi^2}{36} > 0.$$

Der Graph der Funktion h hat an der Stelle $t = 6$ einen Hochpunkt. Es gilt:

$$h(6) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) + 6 = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 26.$$

Die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge im Stausee liegt bei 26 000 m^3/h.

☞ *Alternative:* Der Verlauf des Graphen von h entspricht dem Verlauf des Graphen von z. Der Graph von h ist lediglich um 19 LE nach unten verschoben. Der Graph von h hat also an derselben Stelle wie der Graph von z einen Hochpunkt: Bereits im vorangenenen Aufgabenteil wurden die Stellen bestimmt, an denen der Graph von z Extrempunkte besitzt. Der Graph von z hat einen Hochpunkt bei $t = 6$, also auch der Graph von h. Es gilt:

$$h(6) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 6\right) + 6 = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 6 = 26.$$

Die maximale momentane Änderungsrate der Wassermenge im Stausee liegt bei 26 000 m^3.

b) ➤ *Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn*

Zu Beobachtungsbeginn befinden sich 2 500 000 m^3 Wasser im Stausee. Gesucht ist die Wassermenge im Stausee 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn. Die Änderungsrate der Wassermenge im Stausee ist gegeben durch die Funktion h mit

$$h(t) = 20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6.$$

In den ersten 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn kommt die Menge H an Wasser hinzu. Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{12} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{12} \left(20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[20 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) + 6 \cdot t\right]_0^{12} \\ &= \left[\frac{240}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) + 6t\right]_0^{12} \\ &= -\frac{240}{\pi} \cdot \cos(\pi) + 6 \cdot 12 + \frac{240}{\pi} \cdot \cos(0) - 6 \cdot 0 \\ &= \frac{240}{\pi} + 72 + \frac{240}{\pi} \\ &= \frac{480}{\pi} + 72 \\ &\approx 224{,}789. \end{aligned}$$

In den ersten 12 Stunden kommen also ungefähr 224 789 m^3 Wasser hinzu. Im Stausee befinden sich damit 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn ungefähr 2 724 789 m^3 Wasser.

➤ *Zunahme der Wassermenge in 24 Stunden*

Die Funktion für die Zuflussrate ist periodisch mit einer Periodenlänge von 24 Stunden. Die Funktion für die Abflussrate ist konstant. Innerhalb eines 24 Stundenzeitraum verändert sich die Wassermenge im Stausee wie folgt:

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_0^{24} h(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{24} \left(20 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right) + 6\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[20 \cdot \frac{12}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) + 6 \cdot t\right]_0^{24} \\ &= \left[\frac{240}{\pi} \cdot \left(-\cos\left(\frac{\pi}{12} \cdot t\right)\right) + 6t\right]_0^{24} \\ &= -\frac{240}{\pi} \cdot \cos(2\pi) + 6 \cdot 24 + \frac{240}{\pi} \cdot \cos(0) - 6 \cdot 0 \\ &= -\frac{240}{\pi} + 144 - \frac{240}{\pi} \\ &= 144. \end{aligned}$$

Innerhalb von 24 Stunden nimmt die Wassermenge im Stausee also um 144 000 m^3 zu.

➤ *Bestimmung der konstanten Abflussrate*

Zunächst wird bestimmt, wie sich die Wassermenge im See innerhalb von 24 Stunden ohne Abfluss verändern würde. Gerade eben wurde gezeigt, dass bei einer konstanten Abflussrate von 19 m^3/h die Wassermenge im See um 144 000 m^3 zunimmt. Ohne Abfluss nimmt die Wassermenge des Stausees in 24 Stunden um Z zu mit

$$Z = 144000 + 24 \cdot 19000 = 600000.$$

Innerhalb von 24 Stunden nimmt die Wassermenge im Stausee ganz ohne Abfluss um 600 000 m^3 zu. In einem Zeitraum von 14 Tagen fließen damit 8 400 000 m^3 Wasser hinzu. Zu Beginn des Beobachtungszeitraumes waren 2 500 000 m^3 Wasser im Stausee enthalten. Ohne Abfluss würde der Stausee somit 10 900 000 m^3 Wasser enthalten.

Damit am Ende der 14 Tage genau 4 180 000 m^3 Wasser im Stausee enthalten sind, müssen also in 14 Tagen 6 720 000 m^3 Wasser abfließen, das entspricht 480 000 m^3 pro Tag und 20 000 m^3 pro Stunde.

Lösung zu Aufgabe A 2.2

a) ➤ *Extrempunkte*

Zunächst werden die Extrempunkte des Graphen von f bestimmt. Für die ersten beiden Ableitungen von f gelten:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$f''(x) = 6x - 18$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind die Lösungen der Gleichung:

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 18x + 24 = 0$$
$$\iff x_{1,2} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3}$$
$$\iff x_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6}$$
$$\iff x_1 = 2 \quad \text{oder} \quad x_2 = 4.$$

Außerdem gelten:

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 18 = -6 < 0$$
$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 18 = 6 > 0.$$

Damit hat der Graph von f an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 4$ einen Tiefpunkt. Nun werden die vollständigen Koordinaten der Extrempunkte ermittelt:

$$f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 24 \cdot 2 - 14 = 6$$
$$f(4) = 4^3 - 9 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 - 14 = 2$$

Der Graph von f hat den Hochpunkt $H(2|6)$ und den Tiefpunkt $T(4|2)$

➤ *Gleichung der Gerade durch die Punkte* H *und* T

Zunächst wird eine Gleichung der Geraden g bestimmt, welche die Punkte H und T enthält. Für die Steigung m der Geraden g gilt:

$$m = \frac{y_T - y_H}{x_T - x_H} = \frac{2 - 6}{4 - 2} = -2.$$

Die Gerade g hat damit die Gleichung:

$$g(x) = -2x + c.$$

Mithilfe einer Punktprobe mit T wird der Wert des y-Achsenabschnitts c bestimmt:

$$2 = -2 \cdot 4 + c \iff c = 10.$$

Die Gerade g hat also die Gleichung

$$g(x) = -2x + 10.$$

➤ *Bestimmung der Schnittpunkte*

Die Schnittpunkte der Geraden g mit den Koordinatenachsen sind gegeben durch:

$$g(0) = -2 \cdot 0 + 10 = 10, \quad \text{also} \quad P(0|10),$$
$$g(x) = 0 \iff -2x + 10 = 0 \iff x = 5, \quad \text{also} \quad Q(5|0).$$

➤ *Bestimmung des prozentualen Anteils*

Zunächst wird die Länge der Strecke L_{HT} zwischen den beiden Extrempunkten bestimmt. Es gilt:

$$L_{HT} = \sqrt{(y_T - y_H)^2 + (x_T - x_H)^2}$$
$$= \sqrt{(2 - 6)^2 + (4 - 2)^2}$$
$$= \sqrt{20}.$$

Für die Länge der Strecke L_{PQ} zwischen den beiden Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen gilt:

$$L_{PQ} = \sqrt{(y_P - y_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2}$$
$$= \sqrt{(10 - 0)^2 + (0 - 5)^2}$$
$$= \sqrt{125}.$$

Der prozentuale Anteil p der Strecke HT an der Strecke PQ ist gegeben durch:

$$p = \frac{L_{HT}}{L_{PQ}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{125}} = 0{,}4 = 40\,\%.$$

Der prozentuale Anteil der Strecke HT an der Strecke PQ beträgt 40 %.

b) Die Steigung des Graphen von f an der Stelle x ist der Wert der Ableitung an dieser Stelle. Die Funktion s mit

$$s(x) = f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

ordnet damit jedem x die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle zu. Zu zeigen ist also, dass die Funktion s keine Werte kleiner als -3 besitzt. Dafür werden zunächst die Extrempunkte des Graphen von h bestimmt. Es gelten:

$$s'(x) = 6x - 18$$
$$s''(x) = 6$$

und damit:

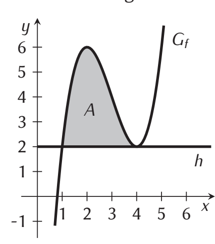
$$s'(x) = 0 \iff 6x - 18 = 0 \iff x = 3.$$

Wegen

$$s''(3) = 6 > 0 \quad \text{und} \quad s(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 + 24 = -3$$

hat der Graph der Funktion s den Tiefpunkt $T(3|-3)$. Der Graph von s ist damit eine nach oben geöffnete Parabel mit Tiefpunkt $T(3|-3)$. Die Funktion s und damit die Ableitung der Funktion f, beziehungsweise die Steigung des Graphen von f, kann damit keine Werte annehmen, die kleiner als -3 sind.

c) Der Graph von f und die Gerade h sind im folgenden Schaubild dargestellt.



Zunächst werden die Schnittpunkte der beiden Graphen berechnet. Es gilt:

$$f(x) = h(x) \iff x^3 - 9x^2 + 24x - 14 = 2.$$

Lösungen

Mithilfe eines GTR erhält man die Lösungen

$x_1 = 1$ und $x_2 = 4$.

Das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers kann bestimmt werden durch:

$$V = \pi \int_1^4 (f(x) - 2)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 24x - 14 - 2)^2 \, dx$$

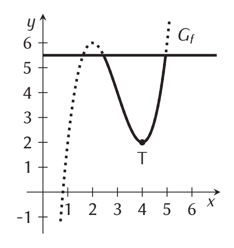
$$= \pi \int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 24x - 16)^2 \, dx$$

Mithilfe eines GTR kann der Wert des Integrals bestimmt werden. Es gilt:

$V \approx 65{,}43$.

Der Rotationskörper hat ein Volumen von ungefähr 65,43 VE.

d) Eine Parallele zur x-Achse soll aus dem Graphen von f ein Kurvenstück ausschneiden, das den Tiefpunkt des Graphen enthält und dessen Endpunkte einen Abstand von 2,5 voneinander haben. In der nachfolgenden Skizze ist der Sachverhalt veranschaulicht.



Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichung:

$$f(x + 2{,}5) = f(x)$$

$$\iff (x + 2{,}5)^3 - 9 \cdot (x + 2{,}5)^2 + 24 \cdot (x + 2{,}5) - 14 = x^3 - 9x^2 + 24x - 14.$$

Mithilfe eines GTR können diese Stellen ohne weitere Umformung bestimmt werden, und es gilt:

$x_1 \approx 1{,}06$ oder $x_2 \approx 2{,}44$.

Das ausgeschnittene Kurvenstück soll den Tiefpunkt des Graphen von f enthalten. Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $\mathrm{T}(4|2)$. Somit kommt nur die Lösung x_2 infrage. Es gilt

$f(2{,}44) \approx 5{,}5$.

Damit schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = 5{,}5$ ein Kurvenstück des Graphen von f aus, das den Tiefpunkt enthält und dessen Endpunkte den Abstand 2,5 voneinander haben.

Lösungen zu Analytische Geometrie, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe B 1.1

a) ➤ *Schnittpunkt der Geraden*

Um den Schnittpunkt der beiden Geraden zu bestimmen, werden die Terme der beiden Geradengleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} -40 \\ -50 \\ 4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \text{also}$$

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2 \end{pmatrix} - t_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 50 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Das zu lösende Gleichungssystem lautet somit:

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & 200t_1 &= 200 \\ &\text{(II)} & 300t_1 - 400t_2 &= 50 \\ &\text{(III)} & 2t_1 - 8t_2 &= -3. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt direkt $t_1 = 1$. Einsetzen von t_1 in (II) und (III) liefert jeweils $t_2 = \frac{5}{8}$. Das Gleichungssystem hat also eine eindeutige Lösung für t_1 und t_2. Für den Schnittpunkt P gilt:

$$\vec{\mathrm{P}} = \begin{pmatrix} -40 \\ -50 \\ 4 \end{pmatrix} + \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 250 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Somit schneiden sich die Flugbahnen im Punkt $\mathrm{P}(160|250|6)$. Da aber $t_1 \neq t_2$ und die Parameter jeweils die Stunden nach dem Start bei $t_1 = t_2 = 0$ angeben, kommt es nicht zum Zusammenstoß.

b) Zunächst werden die Ortsvektoren zu den Punkten P_1 bzw. P_2 bestimmt, an denen sich die Flugzeuge F_1 bzw. F_2 zum angegebenen Zeitpunkt befinden. Diese Punkte erhält man, indem $t_1 = 3$ bzw. $t_2 = 3$ in die entsprechende Gleichung eingesetzt wird:

$$\vec{\mathrm{P}_1} = \begin{pmatrix} -40 \\ -50 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 560 \\ 850 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathrm{P}_2} = \begin{pmatrix} 160 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 1200 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

Lösungen

Der Abstand d der beiden Flugzeuge zueinander ist dann die Länge des Verbindungsvektors der Punkte:

$$d = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\begin{pmatrix} 160 - 560 \\ 1200 - 850 \\ 25 - 10 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -400 \\ 350 \\ 15 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-400)^2 + 350^2 + 15^2} \approx 531{,}72.$$

Der gesuchte Abstand ist somit etwa 531,72 km.

c) Die Höhe, auf der sich die Flugzeuge befinden, wird durch die x_3-Koordinate angegeben. Diese muss also gleichgesetzt werden. Da der Zeitpunkt gesucht ist, an dem beide Flugzeuge die gleiche Höhe haben, wird für beide Parameter t_H gesetzt.

$$\begin{aligned} 4 + t_H \cdot 2 &= 1 + t_H \cdot 8 \\ 3 &= 6t_H \\ t_H &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die Flugzeuge befinden sich somit eine halbe Stunde nach Beobachtungsbeginn auf gleicher Höhe.

d) Die Geschwindigkeit des Flugzeuges lässt sich durch den Betrag des Richtungsvektors berechnen:

$$v_1 = \left|\begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{200^2 + 300^2 + 2^2} = \sqrt{130004} \approx 360{,}56,$$

$$v_2 = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 400 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 400^2 + 8^2} = \sqrt{160064} \approx 400{,}08.$$

Das zweite Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von etwa 400 km/h und damit schneller als das erste Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 360 km/h. Das zweite Flugzeug würde für eine Strecke von 600 km etwa 1,5 Stunden benötigen.

Lösungen zu Analytische Geometrie, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe B 2.1

a) Der Haken ist im Punkt H(3|3|5) an der Decke befestigt. Denn der Abstand zu jeder Wand beträgt laut Aufgabenstellung 3 m und die Decke ist 5 m hoch. Die Gerade g_A, in welcher die Aluminiumstange verläuft, muss den Punkt H enthalten, denn dort ist die Stange befestigt. Dieser Punkt kann als Stützvektor der Gerade verwendet werden. Die Gerade g_A verläuft senkrecht zum Fußboden. Dieser entspricht der x_1x_2-Ebene. Der Normalenvektor dieser Ebene ist damit parallel zum Richtungsvektor der Geraden g_A. Eine Geradengleichung der Gerade g_A ist damit gegeben durch:

$$g_A : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , a \in \mathbb{R}.$$

b) ➤ *Eckpunkt mit rechtem Winkel*

Zunächst werden die Vektoren bestimmt, entlang derer die Dreieckskanten verlaufen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Zwei Vektoren sind genau dann rechtwinklig, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist. Daher werden nun paarweise die Skalarprodukte der Vektoren gebildet:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BS} = 2 \cdot (-1{,}5) + 0{,}5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1{,}5 = -4{,}5 \neq 0,$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AS} = 2 \cdot 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + (-1) \cdot 0{,}5 = 0{,}75 \neq 0,$$

$$\overrightarrow{BS} \circ \overrightarrow{AS} = (-1{,}5) \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 0{,}5 + 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0.$$

Damit hat das Dreieck einen rechten Winkel am Eckpunkt S.

➤ *Flächeninhalt des Spiegels*

Die Fläche eines Dreiecks berechnet man allgemein mit der Formel:

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g.$$

Lösungen

Bei einem rechtwinkligen Dreieck kann eine der Katheten als Grundseite und die andere als Höhe verwendet werden. Damit ist der Flächeninhalt A gegeben durch

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AS}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BS}\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-1,5\\0\\1,5\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,5^2+0,5^2+0,5^2}\cdot\sqrt{(-1,5)^2+0^2+(1,5)^2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{0,75}\cdot\sqrt{4,5} \\
&= \frac{3\sqrt{6}}{8} \\
&\approx 0,92.
\end{aligned}$$

Da eine Längeneinheit einem Meter entspricht, ist die Spiegelfläche etwa $0,92\,\text{m}^2$ groß.

c) ➤ *Geradengleichung des Laserstrahls*

Der Laserstrahl verläuft innerhalb der Gerade g_L mit dem Stützpunkt L und dem angegebenen Richtungsvektor $\vec{v}$:

$$g_L : \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0,5\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\3,8\\3,6\end{pmatrix}.$$

Den Auftrittspunkt P auf dem Spiegel erhält man, indem man den Schnittpunkt der Geraden des Laserstrahls und der Ebene der Seitenwand ABS bestimmt und dann zeigt, dass er innerhalb des Dreiecks der Seitenwand liegt.

➤ *Ebenengleichung der Seitenwand* ABS

Zunächst benötigt man also eine Ebenengleichung der Ebene E der Seitenwand ABS. Eine Parameterform der Ebene E erhält man mit dem Ortsvektor zu A als Stützvektor und den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ als Spannvektoren:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0,5\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix}.$$

Für die Koordinatenform der Ebene bestimmt man zunächst den Normalenvektor durch das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix}2\\0,5\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,25-(-0,5)\\-0,5-1\\1-0,25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,75\\-1,5\\0,75\end{pmatrix} = 0,75\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ein möglicher Normalenvektor ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ und ein Ansatz für eine Koordinatengleichung ist deshalb:

$$E : x_1 - 2x_2 + x_3 = a$$

Eine Punktprobe mit einem beliebigen Punktes der Ebene, zum Beispiel A, liefert a:

$$a = 2 - 2\cdot 2 + 3 = 1.$$

Eine Koordinatenform der Ebene lautet somit:

$$E : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1.$$

➤ *Schnittpunkt von Gerade und Ebene*

Nun werden die Zeilen der Geradengleichung g_L in die Ebenengleichung E eingesetzt:

$$\begin{aligned}
5 - 4r - 2\cdot(0,5+3,8r) + (1+3,6r) &= 1 \\
5 - 4r - 1 - 7,6r + 1 + 3,6r &= 1 \\
-8r &= -4 \\
r &= 0,5.
\end{aligned}$$

Der berechnete Parameter r wird nun in die Geradengleichung g_L eingesetzt. Dies liefert den Schnittpunkt P:

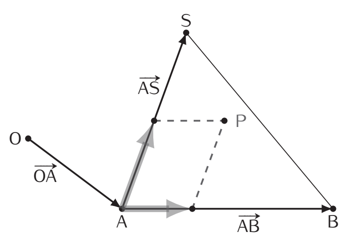
$$\vec{P} = \begin{pmatrix}5\\0,5\\1\end{pmatrix} + 0,5\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2,4\\2,8\end{pmatrix}.$$

Der Laserstrahl trifft also im Punkt P(3|2,4|2,8) auf die Ebene E.

➤ *Lage des Schnittpunkts in der Seitenfläche*

Um zu zeigen, dass P auf der Spiegelfläche liegt, benötigt man die Parameterform der Ebene. Allerdings ist dabei darauf zu achten, dass die Richtungsvektoren jeweils den gewählten Stützpunkt als Fußpunkt haben, zum Beispiel mit dem Stützpunkt A:

$$\begin{aligned}
E : \vec{x} &= \vec{A} + s\cdot\overrightarrow{AB} + t\cdot\overrightarrow{AS} \\
&= \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0,5\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0,5\end{pmatrix}, \quad s,t\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$



Lösungen

Der Punkt liegt dann innerhalb des Dreiecks, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

$0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq s + t \leq 1.$

Zunächst wird der Punkt in die oben angegebene Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}, \quad \text{also}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}4 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Anschließend wird das entstehende Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{aligned} &(\text{I}) & 1 &= 2s + 0{,}5t \\ &(\text{II}) & 0{,}4 &= 0{,}5s + 0{,}5t \\ &(\text{III}) & -0{,}2 &= -s + 0{,}5t. \end{aligned}$$

Zur Lösung des Gleichungssystems kann das Additionsverfahren genutzt werden:

$$(\text{II}) - (\text{III}): \quad 0{,}4 - (-0{,}2) = 0{,}5s - (-s) \iff 0{,}6 = 1{,}5s \iff s = 0{,}4.$$

Den Wert $s = 0{,}4$ eingesetzt in (III) liefert $t = 0{,}4$.

An dieser Stelle muss nicht überprüft werden, ob die Werte auch für die nicht verwendete Gleichung (I) stimmen. Es wurde bereits nachgewiesen, dass der Punkt auf der Ebene liegt. Da die drei Bedingungen erfüllt sind, liegt der Punkt auch in der Dreiecksfläche und der Laser trifft somit auf den Spiegel.

☞ *Alternative:* Es lässt sich auch direkt ohne Umweg über die Koordinatenform der Schnittpunkt der Geraden g_L mit der Ebene E bestimmen. Vorausgesetzt, man hat dann zusätzlich noch Spannvektoren und Stützpunkt geeignet gewählt, erhält man auf diese Art und Weise direkt die Werte für r und s und kann überprüfen, ob sie die Bedingungen erfüllen:

$$g_{\text{L}} = E_{\text{ABS}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3{,}8 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3{,}8 \\ 3{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3{,}8 \\ -3{,}6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} &(\text{I}) & 3 &= 4r + 2s + 0{,}5t \\ &(\text{II}) & -1{,}5 &= -3{,}8r + 0{,}5s + 0{,}5t \\ &(\text{III}) & -2 &= -3{,}6r - s + 0{,}5t. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem wird mit dem Gaußverfahren auf Stufenform gebracht. Diese lautet dann zum Beispiel:

$$\begin{aligned} 3 &= 4r + 2s + 0{,}5 \\ 0{,}5 &= -0{,}2r + 1{,}5s \\ -4 &= -8r. \end{aligned}$$

Aus der unteren Gleichung erhält man direkt $r = 0{,}5$. Durch Einsetzen in die mittlere Gleichung ergibt sich $s = 0{,}4$ und durch Einsetzen beider Ergebnisse in die obere Gleichung $t = 0{,}4$. Da die Bedingungen $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq s \leq 1$ und $0 \leq r + s \leq 1$ für die berechneten Werte s und t erfüllt sind, liegt der Punkt in der Dreiecksfläche. Seine Koordinaten erhält man, indem man r in g_L oder s und t in die Ebenengleichung von E einsetzt.

Lösungen

Lösungen zu Analytische Geometrie, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe B 1

a) ➤ *Koordinatengleichung der Ebene E*

Die Ebene E enthält die Punkte R, S und T. Eine Parameterform der Ebene E ist daher gegeben durch.

$$E: \vec{x} = \vec{R} + r \cdot \overrightarrow{RS} + s \cdot \overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}.$$

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E kann zum Beispiel durch das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren bestimmt werden. Es gilt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot (-2) - (-2) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Ansatz für eine Koordinatengleichung der Ebene E ist damit gegeben durch:

$$E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = a.$$

Um den Wert des Parameters a zu berechnen, wird eine Punktprobe, beispielsweise mit dem Punkt R, durchgeführt:

$$-2 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = a \quad \Longleftrightarrow \quad 22 = a.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist gegeben durch:

$$E: -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 22.$$

➤ QRST *ist ein Trapez*

Ein Trapez ist ein Viereck mit zwei gegenüberliegenden parallelen Seiten. Es gelten:

$$\overrightarrow{TQ} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 8 - 10 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{SR} = \begin{pmatrix} 2 - 2 \\ 9 - 10 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit:

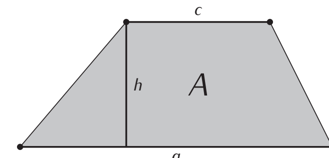
$$\overrightarrow{TQ} = 2 \cdot \overrightarrow{SR}$$

Das Viereck QRST hat also zwei parallele gegenüberliegende Seiten und ist damit ein Trapez.

➤ *Flächeninhalt des Trapezes*

Der Flächeninhalt A eines Trapezes ist gegeben durch

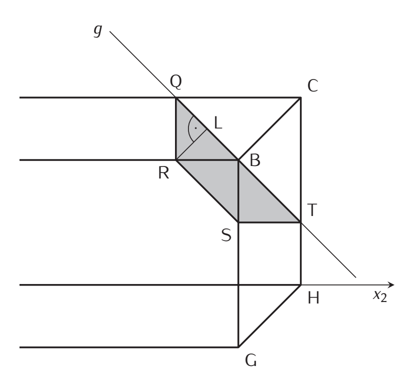
$$A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$$



Der Flächeninhalt A des Trapezes QRST ist damit gegeben durch

$$A = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{RS}\right| + \left|\overrightarrow{TQ}\right|\right) \cdot d(R; g)$$

wobei g die Gerade durch die Punkte T und Q beschreibt.



Zunächst wird eine Gleichung der Geraden g bestimmt:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Anschließend wird die Hilfsebene H bestimmt, welche senkrecht zu g steht und durch den Punkt R verläuft. Als Normalenvektor von H kann der Richtungsvektor der Geraden g gewählt werden, also ist eine Normalengleichung von H gegeben durch:

$$H: -2x_2 + 2x_3 = a.$$

Der Wert des Parameters a kann durch eine Punktprobe mit R berechnet werden.

$$-2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = a \quad \Longleftrightarrow \quad -12 = a.$$

Eine Koordinatengleichung der Hilfsebene H ist gegeben durch:

$$H: -2x_2 + 2x_3 = -12.$$

Nun wird der Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene H berechnet:

$$\begin{aligned} & -2(10-2r)+2(1+2r) = -12 \\ \Longleftrightarrow\quad & -20+4r+2+4r = -12 \\ \Longleftrightarrow\quad & 8r = 6 \\ \Longleftrightarrow\quad & r = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Der Lotfußpunkt L von R auf g ist damit gegeben durch:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{17}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Abstand des Punktes R zur Gerade g kann wie folgt berechnet werden:

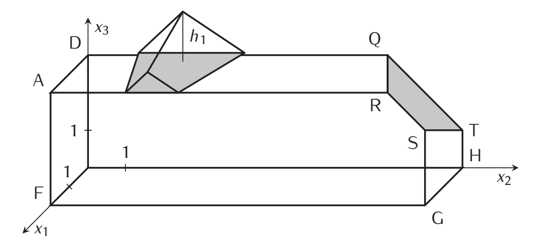
$$d(\text{R},g) = \left| \begin{pmatrix} 2-0 \\ 9-\frac{17}{2} \\ 3-\frac{5}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

Für den Flächeninhalt A des Trapezes QRST gilt:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\overrightarrow{\text{RS}}\right| + \left|\overrightarrow{\text{TQ}}\right| \right) \cdot d(\text{R},g) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \right) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} + \sqrt{8} \right) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \right) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2} \right) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Trapezes QRST ist also $A = 4{,}5$ FE.

b) Zunächst wird eine Skizze des zusammengesetzten Körpers angefertigt.



➤ *Höhe h_1 des kleinen Teilkörpers*

Die Höhe h_1 des kleinen Teilkörpers entspricht dem Abstand des Punktes C von der Ebene E. Dieser Abstand kann wie folgt berechnet werden:

$$h = d(\text{C}; E) = \frac{|-0 + 2 \cdot 10 + 2 \cdot 3 - 22|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{4}{3}$$

Die Höhe des kleinen Teilkörpers beträgt $\frac{4}{3}$ LE.

➤ *Höhe h_2 des großen Teilkörpers*

Die Höhe h_2 des großen Teilkörpers kann direkt abgelesen werden und es gilt:

$$h_2 = 3.$$

➤ *Gesamthöhe h des zusammengesetzten Körpers*

Die Gesamthöhe h des zusammengesetzen Körpers kann nun berechnet werden, und es gilt:

$$h = h_1 + h_2 = 3 + \frac{4}{3} = \frac{13}{3}.$$

Der Körper hat eine Höhe von $\frac{13}{3}$ LE, also ungefähr 4,33 LE.

c) Die Tür liegt im geschlossenen Zustand in der Ebene $x_2 = 0$. Für den Winkel α_a zwischen der x_1x_3-Ebene und der Ebene T_a gilt:

$$\cos(\alpha_a) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}.$$

Der Öffnungswinkel der Türe soll laut Aufgabenstellung 30° betragen. Es gilt:

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gesucht sind damit die Lösungen der Gleichung:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und damit wegen $a \geq 0$:

$$a^2 + 1 = \frac{4}{3} \quad \Longleftrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}58$$

Falls die Türe in der Ebene

$$T_{\sqrt{\frac{1}{3}}} : \sqrt{\frac{1}{3}} x_1 + x_2 = 0$$

liegt, beträgt der Öffnungswinkel der Türe 30°.

Lösungen zu Analytische Geometrie, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe B 2

a) ➤ *Geschwindigkeit des Flugzeugs F_1*

Die Geschwindigkeit v des Flugzeugs F_1 in km/min ist gegeben durch den Betrag des Richtungsvektors der Geraden g_1 entlang derer sich das Flugzeug F_1 bewegt. Es gilt:

$$v = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 12^2 + 0{,}3^2} = \sqrt{160{,}09} \approx 12{,}65.$$

Das Flugzeug F_1 hat also eine Geschwindigkeit von 12,65 km/min.

➤ *Zeitpunkt, an dem F_1 eine Höhe von* 4,9 km *hat*

Die Höhe des Flugzeugs F_1 wird durch die x_3-Komponente bestimmt. Gesucht ist also die Lösung der Gleichung

$$3{,}4 + t \cdot 0{,}3 = 4{,}9 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 5.$$

Das Flugzeug F_1 hat also 5 Minuten nach Beobachtungsbeginn, also um 14.05 Uhr, eine Höhe von 4,9 km.

➤ *Weite des Winkels von F_2*

Zunächst wird eine Gleichung der Geraden g_2 bestimmt, entlang derer das Flugzeug F_2 fliegt. Die Bahn des Flugzeuges F_2 verläuft durch die Punkte P und Q. Ein möglicher Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden g_2 ist gegeben durch:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 - (-17) \\ 36 - 54 \\ 3{,}8 - 3{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -18 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Für das Vorankommen um den Vektor $\vec{v}$ benötigt das Flugzeug 3 Minuten. Damit ist eine Gleichung der Flugbahn des Flugzeuges F_2 gegeben durch:

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ in Minuten nach Beobachtungsbeginn}).$$

Der Winkel α, mit dem das Flugzeug F_2 steigt, entspricht dem Winkel zwischen der Geraden g_2 und der x_1x_2-Ebene und ist gegeben durch:

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{0{,}2}{\sqrt{72{,}04}}$$

und damit:

$$\alpha \approx 1{,}4.$$

Das Flugzeug F_2 steigt also in einem Winkel von ungefähr 1,4°.

b) ➤ *Schnittpunkt der beiden Flugbahnen*

Zunächst werden zwei unterschiedliche Parameter t_1 und t_2 eingeführt und dann die beiden Geradengleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 54 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -4t_1 - 6t_2 &= -32 \\ 12t_1 + 6t_2 &= 48 \\ 0{,}3t_1 - 0{,}2t_2 &= -0{,}2 \end{aligned}$$

mit den Lösungen:

$$t_1 = 2 \quad \text{und} \quad t_2 = 4.$$

Der Schnittpunkt S der beiden Flugbahnen ist gegeben durch:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 3{,}4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 30 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Flugbahnen schneiden sich im Punkt S(7|30|4).

➤ *Überprüfung der Sicherheitsbedingung*

Das Flugzeug F_1 passiert den Schnittpunkt der Flugbahnen 2 Minuten nach Beobachtungsbeginn und das Flugzeug F_2 4 Minuten nach Beobachtungsbeginn. Die beiden Flugzeuge passieren den Schnittpunkt also in einem Abstand von 2 Minuten, und die Sicherheitsbestimmungen werden eingehalten.

c) Die Position des Ballons wird laut Aufgabenstellung durch den Punkt B(6|43|4,3) beschrieben.

➤ *Zeitpunkt, an dem die beiden Flugzeuge denselben Abstand vom Ballon haben*

Gesucht ist derjenige Zeitpunkt t_0, zu welchem beide Flugzeuge denselben Abstand von B haben.

Für den Abstand $d_1(t)$ des Flugzeugs F_1 zum Ballon zum Zeitpunkt t gilt:

$$d_1(t) = \left| \begin{pmatrix} 15 - 4t - 6 \\ 6 + 12t - 43 \\ 3{,}4 + 0{,}3t - 4{,}3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 9 - 4t \\ -37 + 12t \\ -0{,}9 + 0{,}3t \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(9 - 4t)^2 + (-37 + 12t)^2 + (-0{,}9 + 0{,}3t)^2}.$$

und für den Abstand $d_2(t)$ des Flugzeugs F_2 zum Ballon zum Zeitpunkt t:

$$d_2(t) = \left| \begin{pmatrix} -17 + 6t - 6 \\ 54 - 6t - 43 \\ 3{,}2 + 0{,}2t - 4{,}3 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -23 + 6t \\ 11 - 6t \\ -1{,}1 + 0{,}2t \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-23 + 6t)^2 + (11 - 6t)^2 + (-1{,}1 + 0{,}2t)^2}$$

Es soll $d_1(t) = d_2(t)$, also:

$$\sqrt{(9 - 4t)^2 + (-37 + 12t)^2 + (-0{,}9 + 0{,}3t)^2} = \sqrt{(-23 + 6t)^2 + (11 - 6t)^2 + (-1{,}1 + 0{,}2t)^2}.$$

Mithilfe eines GTR werden die Lösungen dieser Gleichung bestimmt und man erhält:

$$t_0 \approx 2{,}27 \quad \text{und} \quad t_1 = 4.$$

Die beiden Flugzeuge haben also ungefähr 2,27 Minuten und 4 Minuten nach Beobachtungsbeginn denselben Abstand zum Ballon.

➤ *Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt t_0 denselben Abstand von den beiden Flugzeugen haben*

Gesucht sind alle Punkte auf der Meeresoberfläche, die zum Zeitpunkt t_0 denselben Abstand zu den beiden Flugzeugen haben. Im folgenden Schaubild sind diese Punkte skizziert.

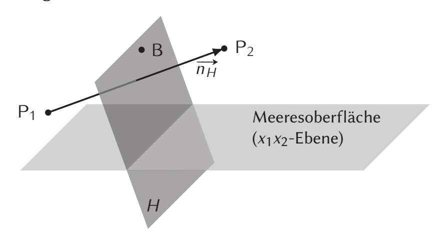
F_2

F_1

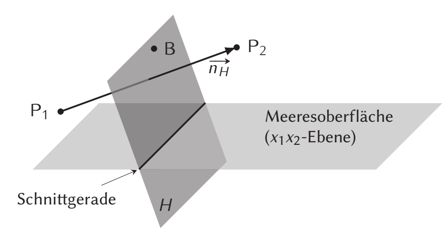
Meeresoberfläche
(x_1x_2-Ebene)

Zunächst werden diejenigen Punkte P_1 und P_2 bestimmt, an denen sich die beiden Flugzeuge F_1 und F_2 zum Zeitpunkt t_0 befinden. Die Menge aller Punkte, die von den beiden Punkten P_1 und P_2 denselben Abstand haben ist eine Ebene H.

Die Ebene H ist im folgenden Schaubild skizziert.



Ein Normalenvektor der Ebene H ist der Verbindungvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$. Der Punkt B ist in der Ebene H enthalten, weil der Ballon im Punkt B zum Zeitpunkt t_0 denselben Abstand von beiden Flugzeugen hat.



Im letzten Schritt wird die Ebene H mit der x_1x_2-Ebene geschnitten. Die resultierende Gerade g beschreibt die Menge aller Punkte auf der Meeresoberfläche, welche zum Zeitpunkt t_0 denselben Abstand von beiden Flugzeugen haben.

Lösungen zu Stochastik, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe C 1

Die Größe des Winkels im Segment 5 ist laut Abbildung 120°. Die Wahrscheinlichkeiten für das Drehen der Zahlen $X = 3$ und $X = 5$ sind somit:

$$P(X=5) = \frac{120°}{360°} = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad P(X=3) = 1 - P(X=5) = \frac{2}{3}.$$

a) ➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A*

Das Experiment kann als ein Bernoulli-Experiment aufgefasst werden. Es gibt zwei mögliche Ausgänge, welche in jedem Versuch unveränderte Wahrscheinlichkeiten haben. Damit gilt für das Ereignis A : „Man erhält genau dreimal eine 3“:

$$P(A) = \binom{8}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 \approx 0{,}068 = 6{,}8\,\%.$$

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B*

Das Ereignis B : „Man erhält mindestens dreimal eine 3“ hat folgendes Gegenereignis $\overline{B}$: „Man erhält höchstens zweimal eine 3“. Die Wahrscheinlichkeit kann damit berechnet werden als:

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \sum_{i=0}^{2} B\left(8; \frac{2}{3}; i\right) \approx 0{,}98034 \approx 98{,}0\,\%.$$

b) Die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse Z des Laplace-Würfels sind

$$P(Z=2) = \frac{1}{2}, \quad P(Z=4) = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad P(Z=6) = \frac{1}{3}.$$

Der Erwartungswert für die gewürfelte Zahl Z ist damit gegeben durch:

$$E(Z) = 2 \cdot P(Z=2) + 4 \cdot P(Z=4) + 6 \cdot P(Z=6) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}.$$

Der Erwartungswert für die erdrehte Zahl des Glücksrades wurde im vorigen Aufgabenteil bestimmt und es gilt:

$$E(X) = \frac{11}{3}.$$

Die Erwartungswerte stimmen somit überein. Ein Spiel ist dann fair, wenn die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen gleich groß ist wie die Wahrscheinlichkeit zu verlieren. Das wird in der nachfolgenden Tabelle überprüft, dabei steht M für Marie und K für Knut. Das Ergebnis $\{X; Z\}$ enthält an erster Stelle die von Marie erdrehte Zahl X und an zweiter Stelle die von Knut gewürfelte Zahl Z.

Ergebnis $\{X;Z\}$	$\{3;2\}$	$\{3;4\}$	$\{3;6\}$	$\{5;2\}$	$\{5;4\}$	$\{5;6\}$
Gewinner	M	K	K	M	M	K
$P(\{X;Z\})$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

Die Gewinnwahrscheinlichkeit für Marie ist gleichzeitig die Verlustwahrscheinlichkeit für Knut und beträgt

$$P(G_M) = P(V_K) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{9}.$$

Folglich gilt für Maries Verlustwahrscheinlichkeit und Knuts Gewinnwahrscheinlichkeit

$$P(V_M) = P(G_K) = \frac{4}{9}.$$

Da $\frac{4}{9} \neq \frac{5}{9}$ gilt, ist das Spiel unfair.

Alternativ hätte man das Ergebnis auch über ein Baumdiagramm berechnen können.

c) ➤ *Standardabweichung für die erdrehte Zahl des Glücksrads*

Der Erwartungswert für die erdrehte Zahl des Glücksrades wurde im vorangegangenen Aufgabenteil berechnet und es gilt $E(X) = \frac{11}{3}$. Die Varianz $Var(X)$ der erdrehten Zahl kann wie folgt berechnet werden:

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{3} \cdot \left(5 - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(3 - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

und somit gilt für die Standardabweichung $\sigma(X)$ der mit dem Glücksrad erdrehten Zahl

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0{,}94$$

➤ *Standardabweichung für die erwürfelte Zahl*

Der Erwartungswert für die erwürfelte Zahl wurde im vorangegangenen Aufgabenteil berechnet und es gilt $E(Y) = \frac{11}{3}$. Die Varianz $\text{Var}(Y)$ der erdrehten Zahl kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(4 - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(6 - \frac{11}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 \\ &= \frac{29}{9}\end{aligned}$$

und somit gilt für die Standardabweichung $\sigma(Y)$ der erwürfelten Zahl

$$\sigma(Y) = \sqrt{\text{Var}(Y)} = \sqrt{\frac{29}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{29} \approx 1{,}79.$$

d) Damit das Spiel fair wird, ersetzt man die 4 durch eine 6 und erhält einen Würfel mit den Augenzahlen

2, 2, 2, 6, 6, 6.

Die Wahrscheinlichkeit eine 2 zu würfeln beträgt $p = \frac{1}{2}$, genauso wie die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln. Würfelt Knut eine 2, so verliert er sicher, unabhängig davon, welche Zahl Marie erdreht. Würfelt er eine 6, so gewinnt er sicher. Die Wahrscheinlichkeit, dass Knut gewinnt ist also genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, dass er verliert. Somit ist das Spiel mit dieser Würfelbeschriftung fair.

Lösungen zu Stochastik, Wahlteil Probe-Abi, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe C 2

a) Von 40 Personen möchten 30 ihren Sommerurlaub im Ausland verbringen. Von den 40 Personen werden 5 zufällig ausgewählt. Diese Auswahl entspricht dem „Ziehen ohne Zurücklegen", denn eine bereits ausgewählte Person kann nicht noch einmal ausgewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit $P(X=5)$, dass alle 5 Personen ins Ausland wollen, kann folgendermaßen bestimmt werden.

$$P(X=5)=\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{28}{38}\cdot\frac{27}{37}\cdot\frac{26}{36}=\frac{609}{2812}\approx 0{,}2166$$

Die Wahrscheinlichkeit liegt also bei ungefähr 21,66 %.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 Personen, die ihren Urlaub in Deutschland verbringen möchten, in die Stichprobe gelangen, lässt sich wie folgt berechnen:

$$P(X=2)=\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{30}{3}}{\binom{40}{5}}=\frac{45\cdot 4060}{658008}=\frac{5075}{18278}\approx 0{,}2777.$$

Damit liegt die Wahrscheinlichkeit, dass von fünf befragten Personen genau zwei angeben, dass sie in Deutschland Urlaub machen möchten, bei ungefähr 27,77 %.

Die Formel setzt sich wie folgt zusammen: die Anzahl der Möglichkeiten, fünf Personen zufällig aus 40 Personen auszuwählen, beträgt $\binom{40}{5}$ und steht dabei im Nenner. Die Anzahl der Möglichkeiten drei Personen auszuwählen, die ins Ausland wollen, ist gegeben durch $\binom{30}{3}$. Diese wird mit der Anzahl der Möglichkeiten zwei Personen auszuwählen, die in Deutschland bleiben wollen, also $\binom{10}{2}$, nach dem Zählprinzip multipliziert. Das Ergebnis steht im Zähler.

c) Die Kriterien für ein Bernoulli-Experiment sind erfüllt, denn jede befragte Person möchte entweder in Deutschland Urlaub machen oder nicht. Außerdem war für jede Person die Wahrscheinlichkeit, dass sie ins Ausland verreisen möchte, gleich groß und zwar $p=0{,}6$.

Damit kann die Wahrscheinlichkeit $P(59<X<78)$, dass im vergangenen Jahr unter 100 befragten Personen mehr als 59 und weniger als 78 für ihren nächsten Urlaub ins Ausland reisten, wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}P(59<X<78)&=P(X<78)-P(X\le 59)\\&=P(X\le 77)-P(X\le 59)\\&=\sum_{i=0}^{77}B(100;0{,}6;i)-\sum_{i=0}^{59}B(100;0{,}6;i)\\&\approx 0{,}5432.\end{aligned}$$

Die Werte der Summen können mit dem GTR berechnet werden. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit betrug ungefähr 54,32 %.

d) Sei Y die Anzahl der befragten Personen, die in Deutschland Urlaub machen möchten. Dann gilt:

$$P(Y\ge 1)=1-P(Y=0).$$

Außerdem gilt bei n befragten Personen:

$$P(Y=0)=\binom{n}{0}\cdot 0{,}4^0\cdot(1-0{,}4)^n=(1-0{,}4)^n=0{,}6^n.$$

Es soll also gelten:

$$\begin{aligned}P(Y\ge 1)\ge 0{,}95 &\iff 1-P(Y=0)\ge 0{,}95\\&\iff P(Y=0)\le 0{,}05\\&\iff 0{,}6^n\le 0{,}05\\&\iff \ln(0{,}6^n)\le \ln 0{,}05\\&\iff n\cdot\ln 0{,}6\le \ln 0{,}05\\&\iff n\ge\frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}6}\\&\iff n\ge 5{,}86.\end{aligned}$$

Im vergangenen Jahr mussten also mindestens 6 Personen befragt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Person in Deutschland Urlaub machen wollte.

e) Die Befürchtung lautet: „Der Anteil der Bevölkerung, der Auslandsreisen bevorzugt, ist gestiegen". In der Nullhypothese steht das Gegenteil der Befürchtung. Die Aussage der Nullhypothese ist damit: „Höchstens 60 % der Personen bevorzugen Urlaub im Ausland". Es gilt also:

$$H_0: p\le 0{,}6.$$

Da es sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest zum Signifikanzniveau $\alpha=0{,}1$ handelt, muss für die Bestimmung der Entscheidungsregel das kleinste $k\in\mathbb{N}$ gefunden werden, sodass die folgende Beziehung erfüllt wird:

$$\begin{aligned}P(X\ge k)\le\alpha &\iff P(X\le k-1)\ge 1-\alpha\\&\Longrightarrow P(X\le k-1)\ge 0{,}9\\&\Longrightarrow \sum_{i=0}^{k-1}B(100;0{,}6;i)\ge 0{,}9.\end{aligned}$$

Der GTR liefert $k-1\ge 66$. Gesucht wird die kleinste natürliche Zahl k, die diese Ungleichung erfüllt, also wählt man $k=67$. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn mindestens 67 Personen angeben, dass sie ihren nächsten Urlaub im Ausland verbringen möchten. Somit gilt für den Ablehnungsbereich $\overline{A}$ sowie für den Annahmebereich A der Nullhypothese:

$$\overline{A}=\{67,\dots,100\}\quad\text{und}$$
$$A=\{0,\dots,66\}.$$

f) Ein „Fehler 1. Art" liegt vor, wenn bei der Umfrage mindestens 67 Personen angeben, dass sie ihren Urlaub im Ausland verbringen möchten, obwohl tatsächlich der Anteil bei höchstens 60 % liegt.

Ein „Fehler 2. Art“ liegt vor, wenn tatsächlich mehr als 60 % ins Ausland reisen möchten, bei der Befragung allerdings höchstens 66 Personen angeben, dass sie ins Ausland reisen möchten.

Die Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art berechnet man für $p = \frac{2}{3}$ und $n = 100$ wie folgt:

$$\beta = P(X \leq 66) = \sum_{i=0}^{66} B\left(100; \frac{2}{3}; i\right) = 0{,}4812.$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 2. Art zu begehen, wenn der tatsächliche Anteil $\frac{2}{3}$ beträgt, liegt bei 48,12 %.

Lösungen zu Stochastik, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe C 1

a) Die Farben der Autos sind unabhängig voneinander und die Wahrscheinlichkeiten gleichbleibend. Es kann also angenommen werden, dass eine Binomialverteilung zugrunde liegt.

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A*

Es gilt:

$$P(A) = \binom{80}{22} \cdot (0{,}299)^{22} \cdot (1 - 0{,}299)^{58} \approx 0{,}089.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 80 Autos genau 22 Stück silber oder grau sind, liegt bei ungefähr 8,9 %.

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B*

Falls die Zufallsvariable X die Anzahl der schwarzen Autos beschreibt, so gilt:

$$P(B) = p(X \geq 33) = 1 - p(X \leq 32) = 1 - \sum_{k=0}^{32} B(80; 0{,}288; k) \approx 0{,}011.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter 80 Autos mindestens 33 Stück schwarz sind, beträgt ungefähr 1,1 %.

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C*

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto keine der in der Tabelle angegebenen Farben hat, liegt bei:

$$p = 1 - 0{,}299 - 0{,}288 - 0{,}151 = 0{,}262.$$

Damit kann die Wahrscheinlichkeit p_1, dass unter den ersten zehn Autos mindestens 3 andersfarbige Autos sind, berechnet werden als:

$$p_1 = 1 - \sum_{k=0}^{2} B(10; 0{,}262; k) \approx 0{,}510$$

Die Wahrscheinlichkeit p_2, dass von den anderen 70 Autos höchstens 20 schwarz sind, liegt bei:

$$p_2 = \sum_{k=0}^{20} B(70; 0{,}288; k) \approx 0{,}543$$

Die beiden Ereignisse sind unabhängig voneinander, es gilt also:

$$p(C) = p_1 \cdot p_2 \approx 0{,}510 \cdot 0{,}543 = 0{,}27693$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten zehn Autos sind mindestens drei sind, die keine der in der Tabelle angegebenen Farben haben und von den anderen 70 Autos höchstens 20 schwarz sind, beträgt ungefähr 27,7 %.

b) Der Anteil der schwarzen Autos wird im folgenden mit p bezeichnet. Es soll gelten:

$$1 - \sum_{k=0}^{27} B(100; p; k) \geq 0{,}95$$

$$\iff \sum_{k=0}^{27} B(100; p; k) \leq 0{,}05$$

Mithilfe eines GTR erhält man $p \approx 0{,}352$.

Falls der Anteil der schwarzen Autos mindestens 35,2 % beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, unter 100 beobachteten Autos mindestens 28 schwarze zu sehen, mindestens 95 %.

c) ➤ *Bedingung für faires Spiel*

Der Einsatz beziehungsweise Gewinn des Spiels ist ein Gummibärchen. Das Spiel ist genau dann fair, wenn die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn genau 50 % beträgt.

➤ *Wahrscheinlichkeit für Sieg*

Nun wird die Wahrscheinlicbkeit berechnet, dass dasjenige Kind gewinnt, dem das Spiel angeboten wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Auto schwarz ist, beträgt:

$p = 0{,}288$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau drei Autos nicht schwarz sind, beträgti:

$P_3 = (1 - 0{,}288)^3 = (0{,}712)^3 \approx 0{,}361$

und die Wahrscheinlichkeit, dass vier Autos nicht schwarz sind, beträgt:

$P_4 = (1 - 0{,}288)^4 = (0{,}712)^4 \approx 0{,}257$

Dass unter 4 Autos mindestens 3 nacheinander nicht schwarz sind, tritt wie folgt ein:

- Auto 1 ist schwarz, die anderen drei nicht.
- Autos 1-3 sind nicht schwarz, jedoch Auto 4
- Alle 4 Autos sind nicht schwarz

Damit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit P:

$P = p \cdot P_3 + P_3 \cdot p + P_4 = 0{,}288 \cdot 0{,}361 + 0{,}361 \cdot 0{,}288 + 0{,}257 \approx 0{,}465$.

➤ *Fazit*

Die Wahrscheinlichkeiten für einen Sieg beziehungsweise eine Niederlage, betragen 46,5 % beziehungsweise 53,5 %. Das Spiel ist daher nicht fair.

d) Die Zufallsvariable Y beschreibt hier die Anzahl der weißen Autos und die Nullhypothese lautet:

$H_0: \quad p \leq 0{,}151$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Anzahl der weißen Autos zu groß ist. Es ist also ein rechtsseitiger Test durchzuführen.

Insofern erhält man einen Ablehnungsbereich

$A = (g, \ldots, 500)$,

wobei g die kleinste Zahl ist, für die gilt:

$P(X \geq g) \leq 0{,}1$

Hier kann man sich mithilfe eines GTR eine Tabelle erstellen lassen und erhält somit:

$P(X \geq 86) \approx 0{,}107$

$P(X \geq 87) \approx 0{,}087$

Daraus trifft man die folgende Entscheidungsregel: Wenn mindestens 87 weiße Autos gezählt werden, wird die Nullhypothese verworfen, ansonsten nicht.

Lösungen zu Stochastik, Wahlteil 2017, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe C 2

a) Die Wahrscheinlichkeiten für das Erdrehen der Zahlen sind unabhängig voneinander und gleichbleibend. Es kann also angenommen werden, dass eine Binomialverteilung zugrunde liegt.

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A*

Es gilt:

$$P(A) = \binom{10}{5} \cdot (0{,}4)^5 \cdot (0{,}6)^5 \approx 0{,}20$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei zehnmaligem Drehen des Glücksrades G_1 genau fünf mal die Zahl 1 erdreht wird, liegt bei ungefähr 20 %.

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B*

Die Summe 10 kann erreicht werden durch das Erdrehen der folgenden Zahlen:

- Glücksrad G_1 zeigt die Zahl 2 und Glücksrad G_2 die Zahl 8.
- Glücksrad G_1 zeigt die Zahl 8 und Glücksrad G_2 die Zahl 2.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B kann wie folgt berechnet werden:

$$P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim ersten Spiel die Summe der angezeigten Zahlen 10 ist, beträgt 20 %.

➤ *Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C*

Die Wahrscheinlichkeit p_H für den Hauptgewinn beträgt:

$$p_H = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05$$

Die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal den Hauptgewinn zu erzielen, ist die Gegenwahrscheinlichkeit davon, niemals den Hauptgewinn zu erzielen. Insofern gilt:

$$P(C) = 1 - 0{,}95^{10} \approx 0{,}40$$

Die Wahrscheinlichkeit, in 10 Spielen mindestens einmal den Hauptgewinn zu erzielen, liegt bei ungefähr 40 %.

b) Analog zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $P(C)$ für das Ereignis C in Aufgabenteil a) wird auch hier Gegenwahrscheinlichkeit zum Ereignis betrachtet. Dann ist dasjenige n gesucht, für das gilt:

$$1 - 0{,}95^n > 0{,}95 \quad \Longleftrightarrow \quad 0{,}95^n < 0{,}05.$$

Diese Ungleichung löst man mithilfe eines GTR oder durch Anwendung der Logarithmusfunktion. Es folgt:

$$n > 58{,}40.$$

Man muss mindestens 59-mal die Glücksräder drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95 % mindestens einmal der Hauptgewinn erzielt wird.

c) Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn des Spiels in Euro. Hierbei muss vom erzielten Gewinn jeweils noch der Einsatz abgezogen werden: Es gelten:

- Beide Glücksräder zeigen eine 1: $X = 0$,
- Beide Glücksräder zeigen eine 2: $X = 2$,
- Beide Glücksräder zeigen eine 8: $X = 14$,
- Die Glücksräder zeigen unterschiedliche Zahlen: $X = -2$.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Gewinnausschüttungen betragen:

$$P(X = 0) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1,$$
$$P(X = 2) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}2,$$
$$P(X = 14) = 0{,}2 \cdot 0{,}25 = 0{,}05.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass kein Gewinn erzielt wird, liegt bei:

$$P(X = -2) = 1 - 0{,}1 - 0{,}2 - 0{,}05 = 0{,}65$$

Der Erwartungswert aus Sicht des Spielers kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} E(X) &= P(X = 0) \cdot 0 + P(X = 2) \cdot 2 + P(X = 14) \cdot 14 + P(X = -2) \cdot (-2) \\ &= 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}2 \cdot 2 + 0{,}05 \cdot 14 - 0{,}65 \cdot 2 \\ &= -0{,}2. \end{aligned}$$

Der Spieler verliert also im Schnitt 20 Cent pro Spiel, dementsprechend macht der Betreiber einen Gewinn von 20 Cent pro Spiel.

d) Das Glücksrad G_2 soll so verändert werden, dass die Wahrscheinlichkeit, in zehn Spielen mindestens einmal den Hauptgewinn zu erzielen maximal 25 % beträgt. Ein Hauptgewinn wird erzielt, wenn beide Glücksräder eine 8 zeigen. Die Wahrscheinlichkeit für das Erdrehen einer 8 in Glücksrad G_2 wird mit p bezeichnet. Damit ist die Wahrscheinlichkeit p_H, den Hauptgewinn zu erzielen, gegeben durch:

$$p_H = 0{,}2 \cdot p.$$

Die Zufallsvariable X stellt die Anzahl der Hauptgewinne bei zehnmaligem Drehen dar. Es soll also gelten:

$$P(X \geq 1) \leq 0{,}25.$$

Diese kann wieder wie folgt über das Gegenereignis aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} && P(X \geq 1) &\leq 0{,}25 \\ \Longleftrightarrow && 1 - P(X = 0) &\leq 0{,}25 \\ \Longleftrightarrow && P(X = 0) &\geq 0{,}75 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit in zehn Spielen keinen Hauptgewinn zu erzielen, beträgt:

$$\begin{aligned} && (1 - p_H)^{10} &\geq 0{,}75 \\ \Longleftrightarrow && 1 - p_H &\geq \sqrt[10]{0{,}75} \\ \Longleftrightarrow && 1 - p_H &\geq 0{,}972 \\ \Longleftrightarrow && p_H &\leq 0{,}028 \end{aligned}$$

Aufgabenstellung siehe Seite 25

und damit:

$$p_H = 0{,}2 \cdot p \approx 0{,}028 \quad \Longleftrightarrow \quad p \approx 0{,}14.$$

Die Wahrscheinlichkeit, am Glücksrad 2 eine 8 zu erdrehen, darf also maximal $p = 0{,}14$ sein. Um hieraus das Maß des Mittelpunktwinkels zu bestimmen, muss man nur noch p mit 360° zu multiplizieren:

$$0{,}14 \cdot 360 = 50{,}4.$$

Der Mittelpunktswinkel des Kreissektors darf also höchstens 50,4° betragen.

Pflichtteil

Pflichtteil 2016

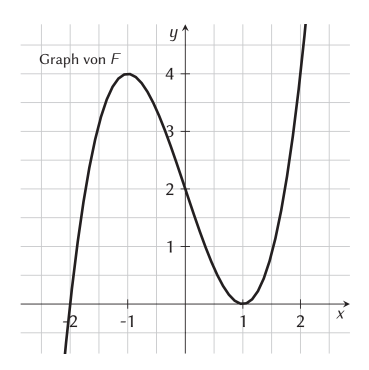
Aufgabe 1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (5x + 1) \cdot \sin\left(x^2\right)$. *(2 VP)*

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{(2x - 4)^3}$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3) = 1$. *(2 VP)*

Aufgabe 3
Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$. *(3 VP)*

Aufgabe 4
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt.
Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist. *(3 VP)*

Aufgabe 5
Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1) = F(1)$

(2) $\int_0^2 f(x)\,dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f\left(F(-2)\right) > 0$

Aufgabe 6

Gegeben ist die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.

b) Die Gerade h verläuft durch $Q(8|5|10)$ und schneidet g orthogonal. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

(5 VP)

Aufgabe 7
Gegeben ist die Ebene $E : 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$.
Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben.
Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von F und G. *(3 VP)*

Aufgabe 8
Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,4	0,1	0,3	0,2

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht. Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils 0,7 beträgt.

b) An dem Glücksrad sollen nur die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das folgende Spiel fair ist:
Für einen Einsatz von 2,50 € darf man einmal am Glücksrad drehen.
Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in Euro an.
Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2.

(4 VP)

Aufgabe 9
Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann. *(3 VP)*

Pflichtteil 2015

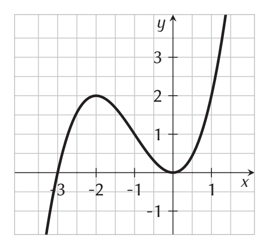
Aufgabe 1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (4 + e^{3x})^5$. *(2 VP)*

Aufgabe 2
Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \mathrm{d}x$. *(2 VP)*

Aufgabe 3
Lösen Sie die Gleichung $(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$. *(3 VP)*

Aufgabe 4
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades hat im Ursprung einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 2$ die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von f. *(4 VP)*

Aufgabe 5
Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f.



Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Der Graph von f hat bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.

(2) $f(-2) < f(-1)$

(3) $f''(-2) + f'(-2) < 1$

(4) Der Grad der Funktion f ist mindestens vier.

(5 VP)

Aufgabe 6
Gegeben sind die drei Punkte $A(4|0|4)$, $B(0|4|4)$ und $C(6|6|2)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der das Dreieck ABC zu einem Parallelogramm ergänzt.
Veranschaulichen Sie durch eine Skizze, wie viele solcher Punkte es gibt.

(4 VP)

Aufgabe 7
Gegeben ist die Ebene $E: 4x_1 + 3x_3 = 12$.

a) Stellen Sie E in einem Koordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie alle Punkte der x_3-Achse, die von E den Abstand 3 haben.

(3 VP)

Aufgabe 8
Ein Glücksrad hat drei farbige Sektoren, die beim einmaligen Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt werden:

Rot: 20 % Grün: 30 % Blau: 50 %

Das Glücksrad wird n-mal gedreht.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft die Farbe Rot angezeigt wird.

a) Begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

Die Tabelle zeigt einen Ausschnitt der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	…
$P(X = k)$	0,01	0,06	0,14	0,21	0,22	0,17	0,11	0,05	…

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird.

c) Entscheiden Sie, welcher der folgenden Werte von n der Tabelle zugrunde liegen kann: 20, 25 oder 30.
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(4 VP)

Aufgabe 9
Mit $V = \pi \int_0^4 \left(4 - \frac{1}{2}x\right)^2 \mathrm{d}x$ wird der Rauminhalt eines Körpers berechnet.

Skizzieren Sie diesen Sachverhalt und beschreiben Sie den Körper. *(3 VP)*

Pflichtteil 2014

Aufgabe 1
Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$. *(2 VP)*

Aufgabe 2
Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,dx$. *(2 VP)*

Aufgabe 3
Lösen Sie die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$. *(3 VP)*

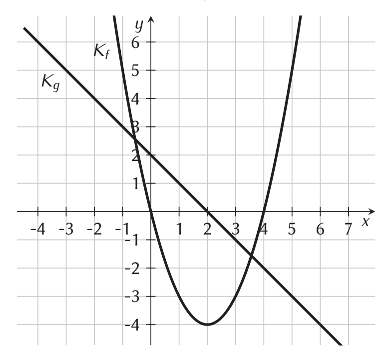
Aufgabe 4
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

a) Beschreiben Sie, wie man den Graphen von g aus dem Graphen von f erhält.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von g für $0 \leq x \leq 4$.

(4 VP)

Aufgabe 5
Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.



a) Bestimmen Sie $f(g(3))$. Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$.

(4 VP)

Aufgabe 6
Gegeben sind die Ebenen $E : x_1 + x_2 = 4$ und $F : x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

a) Stellen Sie die beiden Ebenen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden von E und F an.

b) Die Ebene G ist parallel zur x_1-Achse und schneidet die x_2x_3-Ebene in derselben Spurgeraden wie die Ebene F. Geben Sie eine Gleichung der Ebene G an.

(5 VP)

Aufgabe 7
Gegeben sind die Punkte A(1|10|1), B(-3|13|1) und C(2|3|1). Die Gerade g verläuft durch A und B.
Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden g. *(4 VP)*

Aufgabe 8
An einem Spielautomaten verliert man durchschnittlich zwei Drittel aller Spiele.

a) Formulieren Sie ein Ereignis A, für das gilt:

$$P(A) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

b) Jemand spielt vier Spiele an dem Automaten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er dabei genau zwei Mal?

(3 VP)

Aufgabe 9
Gegeben sind der Mittelpunkt einer Kugel sowie eine Ebene. Die Kugel berührt diese Ebene.
Beschreiben Sie, wie man den Kugelradius und den Berührpunkt bestimmen kann.
(3 VP)

Pflichtteil 2013

Aufgabe 1
Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \left(2x^2 + 5\right) \cdot e^{-2x}$. *(2 VP)*

Aufgabe 2
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4\sin(2x)$.
Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(\pi) = 7$. *(2 VP)*

Aufgabe 3
Lösen Sie die Gleichung $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$. *(2 VP)*

Aufgabe 4
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 2x$.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der beiden Funktionen eingeschlossen wird. *(4 VP)*

Aufgabe 5
Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(2) = 1$

(2) $f'(2) = 0$

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$

(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$

Beschreiben Sie für jede dieser vier Eigenschaften, welche Bedeutung sie für den Graphen von f hat.
Skizzieren Sie einen möglichen Verlauf des Graphen. *(5 VP)*

Aufgabe 6
Die Gerade g verläuft durch die Punkte A(1|-1|3) und B(2|-3|0).
Die Ebene E wird von g orthogonal geschnitten und enthält den Punkt C(4|3|-8).
Bestimmen Sie den Schnittpunkt S von g und E.
Untersuchen Sie, ob S zwischen A und B liegt. *(4 VP)*

Aufgabe 7
Gegeben sind die beiden Ebenen

$$E_1 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \quad \text{und} \quad E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass die beiden Ebenen parallel zueinander sind.
Die Ebene E_3 ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen denselben Abstand.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_3. *(4 VP)*

Aufgabe 8
Neun Spielkarten (vier Asse, drei Könige und zwei Damen) liegen verdeckt auf dem Tisch.

a) Peter dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Es liegt kein Ass aufgedeckt auf dem Tisch.
B: Eine Dame und ein Ass liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

b) Die neun Spielkarten werden gemischt und erneut verdeckt ausgelegt. Laura dreht nun so lange Karten um und lässt sie aufgedeckt auf dem Tisch liegen, bis ein Ass erscheint. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der aufgedeckten Spielkarten an.
Welche Werte kann X annehmen?
Berechnen Sie $P(X \leq 2)$.

(4 VP)

Aufgabe 9
Gibt es eine ganzrationale Funktion vierten Grades, deren Graph drei Wendepunkte besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort. *(3 VP)*

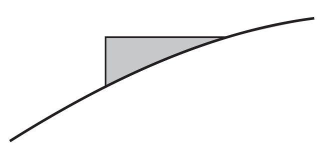
Analysis

Analysis, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 1

Aufgabe A 1.1
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$ beschreibt modellhaft für $-1 \leq x \leq 5$ das Profil eines Geländequerschnitts.
Die positive x-Achse weist nach Osten, $f(x)$ gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an (1 Längeneinheit entspricht 100 m).

a) Auf welcher Höhe liegt der höchste Punkt des Profils?
In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Geländequerschnitt an seiner tiefsten Stelle 10 m tief ist. Bestimmen Sie die Breite des Sees im Geländequerschnitt.
Ab einer Hangneigung von 30° besteht die Gefahr, dass sich Lawinen lösen. Besteht an der steilsten Stelle des Profils zwischen See und höchstem Punkt Lawinengefahr? *(5 VP)*

b) Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seitenwand im Geländequerschnitt liegt. Die Abbildung zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand. Die Oberkante der Wand verläuft waagrecht auf 540 m Höhe. Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.



Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als 130 m^2 ist. *(3 VP)*

c) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f anschließt. Ihr Scheitel liegt bei $x = 6$ und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals.
Auf welcher Höhe befindet sich dieser Punkt? *(4 VP)*

Aufgabe A 1.2
Gegeben ist die Funktion h mit

$$h(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4},$$

deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist. Es gibt einen Kreis, der den Graphen von h in dessen Schnittpunkten mit der x-Achse berührt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises. *(3 VP)*

Analysis, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 2

Aufgabe A 2.1
In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 150 cm. Die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2\,; \quad 0 \leq t \leq 12$$

(t in Stunden nach 10.00 Uhr, $s(t)$ in Zentimeter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe.
Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist.
Wie hoch liegt der Schnee um 12.00 Uhr? *(4 VP)*

b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt.
Zu welchen Uhrzeiten beträgt die Schneehöhe 153 cm? *(3 VP)*

c) Um 12.30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht.
Um wie viele Stunden verlängert sich durch diese Maßnahme der Zeitraum, in dem die Schneehöhe zunimmt?
Wie viele Zentimeter Schnee pro Stunde müssten die Schneekanonen ab 12.30 Uhr liefern, damit um 18.00 Uhr die Schneehöhe 160 cm betragen würde? *(4 VP)*

Aufgabe A 2.2
Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion g_a gegeben durch

$$g_a(x) = a \cdot \cos(a \cdot x); \quad -\frac{\pi}{2a} \leq x \leq \frac{\pi}{2a}$$

Der Graph von g_a schneidet die y-Achse in einem Punkt. Die Strecke von diesem Punkt zum Ursprung ist die Diagonale einer Raute. Die beiden weiteren Eckpunkte der Raute liegen auf dem Graphen von g_a.

a) Bestimmen Sie für $a = 3$ die Längen der beiden Diagonalen dieser Raute. *(2 VP)*

b) Bestimmen Sie den Wert von a, für den die Raute ein Quadrat ist. *(2 VP)*

Lösung ab Seite 173

Analysis, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 1

Aufgabe A 1

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird modellhaft beschrieben durch den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4; \quad -5 \leq x \leq 5 \quad (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) Wie tief ist der Laderaum in der Mitte?
Wie breit ist er in 3 m Höhe?
In welchem Bereich hat der Boden des Laderaums eine Neigung unter 5 %?
Berechnen Sie das Volumen des Laderaums. *(5 VP)*

b) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte im Modell durch die Punkte $P_1(-4|f(-4))$ und $P_2(4|f(4))$ beschrieben werden.
In welchem Abstand voneinander enden diese Stützen auf der Plattform? *(3 VP)*

c) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m^3.
Berechnen Sie die Breite der Zwischendecke. *(4 VP)*

d) Untersuchen Sie, ob sich eine zylinderförmige Röhre mit Außendurchmesser 9,8 m so in Längsrichtung in den Laderaum legen lässt, dass sie ihn an der tiefsten Stelle berührt. *(3 VP)*

Lösung ab Seite 179

Analysis, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 2

Aufgabe A 2.1

Die Entwicklung einer Population in den Jahren 1960 bis 2020 lässt sich durch zwei Funktionen modellhaft beschreiben.
Die Funktion g mit $g(t) = 400 + 20(t+1)^2 \cdot e^{-0,1t}$ beschreibt die Geburtenrate und die Funktion s mit $s(t) = 600 + 10(t-6)^2 \cdot e^{-0,09t}$ beschreibt die Sterberate der Population (t in Jahren seit Beginn des Jahres 1960, $g(t)$ und $s(t)$ in Individuen pro Jahr).

a) Bestimmen Sie die geringste Sterberate.
In welchem Jahr war die Differenz aus Geburten- und Sterberate am größten?
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat. *(4 VP)*

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen.
Berechnen Sie den Bestand der Population zu Beginn des Jahres 2017.
In welchem Jahr erreichte die Population erstmals wieder den Bestand von 1960? *(3 VP)*

Betrachtet wird nun das Größenwachstum eines einzelnen Individuums der Population. Dies kann im Beobachtungszeitraum durch das Gesetz des beschränkten Wachstums modelliert werden. Man geht davon aus, dass dieses Individuum in ausgewachsenem Zustand 0,8 m groß ist. Zu Beobachtungsbeginn betragen seine Größe 0,5 m und seine momentane Wachstumsgeschwindigkeit 0,15 m pro Jahr.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Funktion, die die Körpergröße des Individuums in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
Wie viele Jahre nach Beobachtungsbeginn hat die Körpergröße des Individuums um 50 % zugenommen? *(4 VP)*

Aufgabe A 2.2

Gegeben sind ein Kreis mit Mittelpunkt $O(0|0)$ und die Funktion f mit
$f(x) = \frac{4}{x^2+1}$.
Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte des Kreises mit dem Graphen von f in Abhängigkeit vom Kreisradius. *(4 VP)*

Analysis, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 1

Aufgabe A 1.1
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$.
Ihr Graph ist K.

a) K besitzt einen Extrempunkt und einen Wendepunkt. Geben Sie deren Koordinaten an.
Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K an.
Skizzieren Sie K. *(4 VP)*

b) Für jedes $u > 0$ sind $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks.
Bestimmen Sie einen Wert für u so, dass dieses Dreieck den Flächeninhalt 8 hat.
Für welchen Wert von u ist das Dreieck OPQ gleichschenklig? *(4 VP)*

c) Auf der x-Achse gibt es Intervalle der Länge 3, auf denen die Funktion f den Mittelwert 2,2 besitzt.
Bestimmen Sie die Grenzen eines solchen Intervalls. *(3 VP)*

Aufgabe A 1.2
Gegeben ist für jedes $t > 0$ eine Funktion f_t durch

$$f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - t^2x.$$

Bestimmen Sie t so, dass die beiden Extrempunkte des Graphen von f_t den Abstand 13 voneinander haben. *(4 VP)*

Analysis, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 2

Aufgabe A 2.1
Die Anzahl ankommender Fahrzeuge vor einem Grenzübergang soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Ankunftsrate beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = \frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000}; \quad 0 \leq t \leq 30$$

(t in Stunden nach Beobachtungsbeginn; $f(t)$ in Fahrzeuge pro Stunde).
Anfangs befinden sich keine Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f.
Wann ist die momentane Ankunftsrate maximal?
Bestimmen Sie die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen. *(4 VP)*

b) Am Grenzübergang werden die Fahrzeuge möglichst schnell abgefertigt, jedoch ist die momentane Abfertigungsrate durch 110 Fahrzeuge pro Stunde begrenzt.
Wann beginnen sich die Fahrzeuge vor dem Grenzübergang zu stauen?
Wie viele Fahrzeuge stauen sich maximal vor dem Grenzübergang?
Welches Ergebnis erhielte man, wenn die momentane Abfertigungsrate 12 Stunden nach Beobachtungsbeginn auf konstant 220 Fahrzeuge pro Stunde erhöht würde? *(6 VP)*

Aufgabe A 2.2
Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) - a^2; \quad -\pi < x < \pi.$$

Der Graph von f_a ist G_a.

a) G_a besitzt einen Extrempunkt.
Bestimmen Sie dessen Koordinaten. *(2 VP)*

b) Durch welche Punkte der y-Achse verläuft kein Graph G_a? *(3 VP)*

Analysis, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 1

Aufgabe A 1.1

Der Querschnitt eines 50 Meter langen Bergstollens wird beschrieben durch die x-Achse und den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 8;\ -4 \leq x \leq 4 \ (x \text{ und } f(x) \text{ in Meter}).$$

a) An welchen Stellen verlaufen die Wände des Stollens am steilsten?
Welchen Winkel schließen die Wände an diesen Stellen mit der Horizontalen ein?
Nach einem Wassereinbruch steht das Wasser im Stollen 1,7 m hoch.
Wie viel Wasser befindet sich in dem Stollen? *(6 VP)*

b) Im Stollen soll in 6 m Höhe eine Lampe aufgehängt werden.
Aus Sicherheitsgründen muss die Lampe mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein.
Überprüfen Sie, ob dieser Abstand eingehalten werden kann. *(3 VP)*

c) Ein würfelförmiger Behälter soll so in den Stollen gestellt werden, dass er auf einer seiner Seitenflächen steht.
Wie breit darf der Behälter höchstens sein? *(3 VP)*

Aufgabe A 1.2

Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = (x - 1) \cdot \left(1 - \frac{1}{t} \cdot e^x\right)$.
Für welche Werte von t besitzt f_t mehr als eine Nullstelle? *(3 VP)*

Analysis, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 2

Aufgabe A 2.1

Ein zunächst leerer Wassertank einer Gärtnerei wird von Regenwasser gespeist. Nach Beginn eines Regens wird die momentane Zuflussrate des Wassers durch die Funktion r mit

$$r(t) = 10\,000 \cdot \left(e^{-0{,}5 \cdot t} - e^{-t}\right);\ 0 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $r(t)$ in Liter pro Stunde).

a) Bestimmen Sie die maximale momentane Zuflussrate.
In welchem Zeitraum ist diese Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde?
Zu welchem Zeitpunkt nimmt die momentane Zuflussrate am stärksten ab? *(4 VP)*

b) Wie viel Wasser befindet sich drei Stunden nach Regenbeginn im Tank?
Zu welchem Zeitpunkt sind 5000 Liter im Tank? *(3 VP)*

c) Zur Bewässerung von Gewächshäusern wird nach 3 Stunden begonnen, Wasser aus dem Tank zu entnehmen. Daher wird die momentane Änderungsrate des Wasservolumens im Tank ab diesem Zeitpunkt durch die Funktion w mit

$$w(t) = r(t) - 400;\ 3 \leq t \leq 12$$

beschrieben (t in Stunden seit Regenbeginn, $w(t)$ in Liter pro Stunde).
Wie viel Wasser wird in den ersten 12 Stunden nach Regenbeginn entnommen?
Ab welchem Zeitpunkt nimmt die Wassermenge im Tank ab?
Bestimmen Sie die maximale Wassermenge im Tank. *(4 VP)*

Aufgabe A 2.2

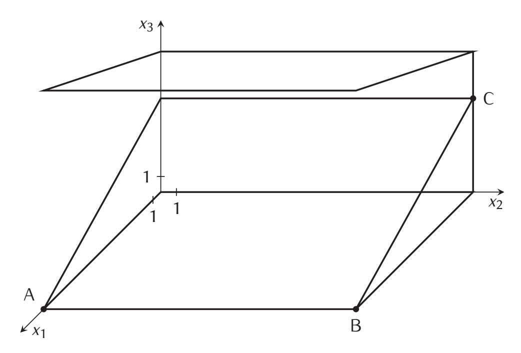
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sin(\pi \cdot x)$ für $0 \leq x \leq 1$.
Der Graph von f begrenzt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A.
Berechnen Sie A exakt.
Der Graph einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades schneidet die x-Achse bei $x = 0$ und $x = 1$ und schließt mit der x-Achse eine Fläche ein, deren Inhalt halb so groß wie A ist.
Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung von g. *(4 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 1

Aufgabe B 1.1

In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche einer Tribüne (alle Koordinatenangaben in Meter). Die x_1x_2-Ebene stellt den Erdboden dar. Die Eckpunkte der Dachfläche liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche. Die Dachfläche liegt in der durch $E: x_1 - 3x_3 = -27$ beschriebenen Ebene (siehe Abbildung).



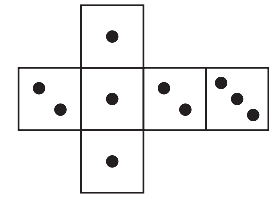
a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt.
Berechnen Sie den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden.
Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche. *(4 VP)*

b) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mindestens 2,5 m hoch sein.
Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist.

Zur Installation von Lautsprechern wird eine 5,2 m lange, senkrecht zum Erdboden verlaufende Stütze montiert. Ihre Enden werden an der Kante BC und am Dach der Tribüne fixiert.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kante BC, in dem das untere Ende der Stütze fixiert wird. *(4 VP)*

Aufgabe B 1.2

Bei einem Spiel wird ein idealer Würfel verwendet, dessen Netz in der Abbildung dargestellt ist.



a) Der Würfel wird 2-mal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 3 beträgt.

Nun wird der Würfel 12-mal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt.

Die Beschriftung des Würfels soll so geändert werden, dass man bei 12-maligem Werfen des Würfels mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens 4-mal die Augenzahl 3 erhält.
Auf wie vielen Seiten des Würfels muss dann die Augenzahl 3 mindestens stehen? *(4 VP)*

b) Ein Spieler hat die Vermutung, dass der ursprüngliche Würfel zu oft die Augenzahl 3 zeigt. Die Nullhypothese

H_0: „Die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 3 beträgt höchstens $\frac{1}{6}$.“

soll durch eine Stichprobe mit 100 Würfen auf einem Signifikanzniveau von 1 % getestet werden.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten. *(3 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 2

Aufgabe B 2.1
Die Punkte A(0|-6|0), B(6|0|0), C(0|6|0) und S(0|0|5) sind die Eckpunkte der Pyramide ABCS. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Kante AS und M_2 ist der Mittelpunkt der Kante CS. Die Ebene E verläuft durch M_1, M_2 und B.

a) Die Ebene E schneidet die Pyramide in einer Schnittfläche.
Stellen Sie Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Umfang der Schnittfläche.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
[Teilergebnis: $E: 5x_1 + 12x_3 = 30$] *(4 VP)*

b) Der Punkt Q liegt auf der Kante BS und bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q. *(3 VP)*

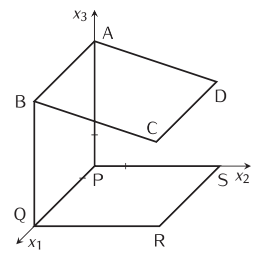
c) Der Punkt Z liegt in der x_1x_3-Ebene und im Innern der Pyramide ABCS. Er hat von der Grundfläche ABC, der Seitenfläche ACS und von E den gleichen Abstand.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Z. *(3 VP)*

Aufgabe B 2.2
Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind? *(5 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 1

Aufgabe B 1.1
Über einer Terrasse ist als Sonnenschutz eine Markise an einer Hauswand befestigt.



In einem Koordinatensystem stellen die Punkte P(0|0|0), Q(5|0|0), R(5|4|0), S(0|4|0) die Eckpunkte der Terrasse dar. Die Markise wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten A(0|0|4), B(5|0|4), C(5|3,9|2,7), D(0|3,9|2,7) beschrieben (alle Koordinatenangaben in Meter). Die Lage der Hauswand wird durch die x_1x_3-Ebene beschrieben.

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, welche die Lage der Markise beschreibt.
Berechnen Sie den Winkel zwischen Markise und Hauswand. *(3 VP)*

b) In der Mitte zwischen Q und R steht eine 30 cm hohe Stablampe. Am Markisenrand CD wird ein senkrecht nach unten hängender Regenschutz angebracht, der genau bis auf die Terrasse reicht. Bei starkem Wind schwingt er frei um CD. Kann der Regenschutz dabei die Stablampe berühren?
Welchen Abstand von der Hauswand darf die Stablampe auf der Terrasse höchstens haben, damit dies nicht passiert? *(4 VP)*

c) Die Sonne scheint und der Regenschutz wird entfernt. Die Richtung der Sonnenstrahlen wird durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ beschrieben.
Begründen Sie ohne Rechnung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird.
Die Markise kann ein- und ausgefahren werden. Dabei bewegen sich die äußeren Eckpunkte der Markise längs der Geraden BC und AD. Die Markise wird nun so weit eingefahren, dass der Terrassenrand zwischen Q und R genau zur Hälfte im Schatten liegt.
Bestimmen Sie die neuen Koordinaten der äußeren Eckpunkte der Markise. *(4 VP)*

Aufgabe B 1.2
Ein Großhändler gibt an, dass sein Weizensaatgut eine Keimfähigkeit von mindestens 80 % hat. Mehrere Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit in Wirklichkeit kleiner ist. Deswegen wird die Aussage des Großhändlers mithilfe eines Tests auf einem Signifikanzniveau von 10 % überprüft, indem 500 Weizenkörner untersucht werden. Als Nullhypothese wird die Angabe des Großhändlers verwendet.

Geometrie/Stochastik 2015

Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.
Die tatsächliche Keimfähigkeit des Saatguts beträgt 82 %.
Wie groß ist in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei obigem Test die Nullhypothese fälschlicherweise verworfen wird? *(4 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 2

Aufgabe B 2.1
Gegeben sind die Ebene $E : 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 16$ und eine Geradenschar durch

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g_4 mit der Ebene E.
Welche Gerade der Schar ist orthogonal zu g_4? *(3 VP)*

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel von g_4 und E.
Für welche Werte von a mit $-10 \leq a \leq 10$ hat der Schnittwinkel von g_a und E die Weite 10°? *(3 VP)*

c) Begründen Sie, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F : x_3 = 1$ liegen.
Es gibt eine Gerade h, die durch den Punkt P(5|1|1) geht und in F liegt, aber nicht zur Schar gehört.
Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h. *(3 VP)*

Aufgabe B 2.2
Bei einem Biathlonwettbewerb läuft ein Athlet eine 2,5 km lange Runde, dann schießt er liegend fünf Mal; anschließend läuft er eine zweite Runde und schießt stehend fünf Mal; nach einer dritten Runde erreicht er das Ziel. Für jeden Fehlschuss muss er direkt nach dem Schießen eine 200 m lange Strafrunde laufen. Aufgrund der bisherigen Schießleistungen geht der Trainer davon aus, dass der Athlet stehend mit 88 % und liegend mit 93 % Wahrscheinlichkeit trifft. Es wird vereinfachend davon ausgegangen, dass die Ergebnisse der einzelnen Schüsse voneinander unabhängig sind.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal trifft. *(1 VP)*

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet im gesamten Wettbewerb höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss. *(3 VP)*

c) Der Athlet möchte seine Leistungen im Stehendschießen verbessern und künftig mit über 95 % Wahrscheinlichkeit bei fünf Schüssen mindestens vier Mal treffen.
Welche Trefferwahrscheinlichkeit muss er dafür mindestens erreichen? *(2 VP)*

Geometrie/Stochastik 2015

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 1

Aufgabe B 1.1
Gegeben sind die Punkte A(5|-5|0), B(5|5|0), C(-5|5|0) und D(-5|-5|0).
Das Quadrat ABCD ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(0|0|12).

a) Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene E.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
Berechnen Sie den Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche der Pyramide eingeschlossen wird.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCS. *(4 VP)*

b) Betrachtet werden nun Quader, die jeweils vier Eckpunkte auf den Pyramidenkanten und vier Eckpunkte in der Grundfläche der Pyramide haben.
Einer dieser Quader hat den Eckpunkt Q(2,5|2,5|0).
Berechnen Sie sein Volumen.
Bei einem anderen dieser Quader handelt es sich um einen Würfel.
Welche Koordinaten hat dessen Eckpunkt auf der Kante BS? *(4 VP)*

Aufgabe B 1.2
In einem Gefäß G1 sind 6 schwarze und 4 weiße Kugeln.
In einem Gefäß G2 sind 3 schwarze und 7 weiße Kugeln.

a) Aus Gefäß G1 wird 20 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 12 Mal eine schwarze Kugel gezogen wird.
Aus Gefäß G2 wird 8 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln gezogen werden, und zwar bei direkt aufeinanderfolgenden Zügen. *(4 VP)*

b) Nun werden aus G1 zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen und in das Gefäß G2 gelegt. Anschließend wird eine Kugel aus G2 gezogen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Kugel schwarz? *(3 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 2

Aufgabe B 2.1
An einer rechteckigen Platte mit den Eckpunkten A(10|6|0), B(0|6|0), C(0|0|3) und D(10|0|3) ist im Punkt F(5|6|0) ein 2 m langer Stab befestigt, der in positive x_3-Richtung zeigt.
Eine punktförmige Lichtquelle befindet sich zunächst im Punkt L(8|10|2) (Koordinatenangaben in m).

a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Platte liegt.
Stellen Sie die Platte, den Stab und die Lichtquelle in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Winkel zwischen dem Stab und der Platte.
[Teilergebnis: $E : x_2 + 2x_3 = 6$] *(3 VP)*

b) Der Stab wirft einen Schatten auf die Platte.
Bestimmen Sie den Schattenpunkt des oberen Endes des Stabes.
Begründen Sie, dass der Schatten vollständig auf der Platte liegt. *(3 VP)*

c) Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Kreisbahn, deren Mittelpunkt das obere Ende des Stabes ist. Dabei kollidiert die Lichtquelle mit der Platte.
Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Kollisionspunkte. *(3 VP)*

Aufgabe B 2.2
Bei der Produktion von Bleistiften beträgt der Anteil fehlerhafter Stifte erfahrungsgemäß 5 %.

a) Ein Qualitätsprüfer entnimmt der Produktion zufällig 800 Bleistifte. Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte in dieser Stichprobe.
Berechnen Sie $P(X \leq 30)$.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht der Wert von X um weniger als 10 vom Erwartungswert von X ab? *(3 VP)*

b) Der Betrieb erwirbt eine neue Maschine, von der behauptet wird, dass höchstens 2 % der von ihr produzierten Bleistifte fehlerhaft sind. Diese Hypothese H_0 soll mithilfe eines Tests an 800 zufällig ausgewählten Stiften überprüft werden.
Bei welchen Anzahlen fehlerhafter Stifte entscheidet man sich gegen die Hypothese, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit maximal 5 % betragen soll? *(3 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 1

Aufgabe B 1.1
Ein Würfel besitzt die Eckpunkte O(0|0|0), P(6|0|0), Q(0|6|0) und R(0|0|6). Gegeben ist außerdem die Ebene $E: 3x_2 + x_3 = 8$.

a) Stellen Sie den Würfel und die Ebene E in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Winkel, den die Ebene E mit der x_1x_2-Ebene einschließt.
Bestimmen Sie den Abstand von E zur x_1-Achse. *(5 VP)*

b) Die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar. Diese Schar ist gegeben durch

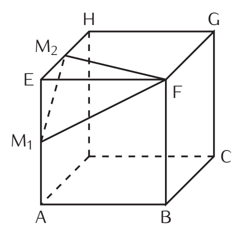
$$E_a: 3x_2 + x_3 = a;\ a \in \mathbb{R}.$$

Welche Lage haben die Ebenen der Schar zueinander?
Für welche Werte von a hat der Punkt S(6|6|6) den Abstand $\sqrt{10}$ von der Ebene E_a?
Für welche Werte von a hat die Ebene E_a gemeinsame Punkte mit dem Würfel? *(6 VP)*

Aufgabe B 1.2
Bei einer Lotterie sind 10 % der Lose Gewinnlose.
Jemand kauft drei Lose.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind darunter mindestens zwei Gewinnlose?
Wie viele Lose hätte man mindestens kaufen müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt? *(4 VP)*

Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 2

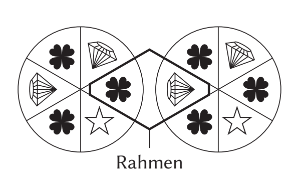
Aufgabe B 2.1
In einem würfelförmigen Ausstellungsraum mit der Kantenlänge 8 Meter ist ein dreieckiges Segeltuch aufgespannt.
Es ist im Punkt F sowie in den Kantenmitten M_1 und M_2 befestigt (siehe Abbildung).
Es wird angenommen, dass das Segeltuch nicht durchhängt.
In einem Koordinatensystem stellen die Punkte A(8|0|0), C(0|8|0) und H(0|0|8) die entsprechenden Ecken des Raumes dar.



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene S, in der das Segeltuch liegt.
Zeigen Sie, dass das Segeltuch die Form eines gleichschenkligen Dreiecks hat.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Segeltuchs.
Welchen Abstand hat das Segeltuch von der Ecke E?
[Teilergebnis: $S: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24$] *(6 VP)*

b) Auf der Diagonale AC steht eine 6 Meter hohe Stange senkrecht auf dem Boden.
Das obere Ende der Stange berührt das Segeltuch.
In welchem Punkt befindet sich das untere Ende der Stange? *(3 VP)*

Aufgabe B 2.2
Auf zwei Glücksrädern befinden sich jeweils sechs gleich große Felder. Bei jedem Spiel werden die Räder einmal in Drehung versetzt. Sie laufen dann unabhängig voneinander aus und bleiben so stehen, dass von jedem Rad genau ein Feld im Rahmen sichtbar ist.



Lösung ab Seite 241

a) Zunächst werden die Räder als ideal angenommen.
Bei einem Einsatz von 0,20 € sind folgende Auszahlungen vorgesehen:

Stern - Stern	2,00 €
Diamant - Diamant	0,85 €
Kleeblatt - Kleeblatt	0,20 €

In allen anderen Fällen wird nichts ausgezahlt.

Weisen Sie nach, dass das Spiel fair ist.
Nun möchte der Veranstalter auf lange Sicht pro Spiel 5 Cent Gewinn erzielen.
Dazu soll nur der Auszahlungsbetrag für "Diamant - Diamant"geändert werden.
Berechnen Sie diesen neuen Auszahlungsbetrag. *(3 VP)*

b) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit p für „Stern - Stern“ geringer als $\frac{1}{36}$ ist. Daher soll ein Test mit 500 Spielen durchgeführt werden.
Formulieren Sie die Entscheidungsregel für die Nullhypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{36}$, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit höchstens 5 % betragen soll. *(3 VP)*

Lösungen

Lösungen zu Pflichtteil, 2016

Lösung zu Aufgabe 1

Die Funktion f ist ein Produkt von Funktionen $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Die beiden Funktionen u und v sind dabei gegeben durch

$$u(x) = 5x + 1 \quad \text{und} \quad v(x) = \sin(x^2).$$

Es gelten:

$$u'(x) = 5 \quad \text{und} \quad v(x) = (2x) \cdot \cos(x^2)..$$

Nach der Produktregel kann nun die Ableitung der Funktion f bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\sin(x^2) + (5x + 1) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x \\ &= 10x^2\cos(x^2) + 2x\cos(x^2) + 5\sin(x^2). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Für die Stammfunktion einer linear verketteten Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot g(mx + b)$$

mit reellen Zahlen a, b und m gilt:

$$F(x) = \frac{a}{m} \cdot G(mx + b) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

falls G eine Stammfunktion von g ist. In diesem Fall gilt:

$$a = 48, \quad m = 2 \quad \text{und} \quad b = -4$$

$$g(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}.$$

Für die Stammfunktion G von g gilt:

$$G(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$$

Eine allgemeine Stammfunktion von f lautet:

$$F(x) = \frac{48}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}(2x - 4)^{-2}\right) + c = -\frac{12}{(2x - 4)^2} + c.$$

Nun wird die reelle Zahl c so bestimmt, dass $F(3) = 1$ gilt. Also wird folgende Gleichung nach c aufgelöst:

$$\begin{aligned} -\frac{12}{(2 \cdot 3 - 4)^2} + c = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad -\frac{12}{4} + c = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad c = 4. \end{aligned}$$

Die gesuchte Stammfunktion ist

$$F(x) = -\frac{12}{(2x - 4)^2} + 4.$$

Lösung zu Aufgabe 3

Die gesamte Gleichung wird zunächst mit dem Nenner des Bruchterms e^x durchmultipliziert. Dies verändert die Lösungsmenge nicht, da e^x für alle $x \in \mathbb{R}$ ungleich Null ist. Man erhält die Gleichung

$$3e^x - e^{2x} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 3e^x + 2 = 0.$$

Diese Gleichung wird mit dem Substitutionsverfahren gelöst. Substituiert man $e^x = u$, so entsteht eine quadratische Gleichung, die zum Beispiel mit der Mitternachtsformel gelöst werden kann.

➤ *Substitution*

Die Gleichung lautet nun

$$u^2 - 3u + 2 = 0.$$

Die Mitternachtsformel liefert die Lösungen

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad u_1 = 1, \; u_2 = 2.$$

➤ *Resubstitution*

Um die Lösungen der ursprünglichen Gleichung zu bestimmen, muss nun wieder resubstituiert werden. Es gilt $e^x = u$, und mit den gerade berechneten Werten für u erhält man:

$$\begin{aligned} e^{x_1} = u_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{x_1} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = \ln(1) = 0, \\ e^{x_2} = u_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{x_2} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \ln(2). \end{aligned}$$

Somit gehört zu der Gleichung die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{0, \ln(2)\}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Eine Gerade ist Tangente an den Graphen der Funktion in einem Punkt W, wenn W auf der Geraden liegt und die Steigung der Geraden gleich der ersten Ableitung der Funktion im Punkt W ist. Es muss also der Wendepunkt W des Graphen der Funktion und die Ableitung an dieser Stelle ermittelt werden.

➤ *Koordinaten des Wendepunktes*

Hierzu werden zunächst die ersten drei Ableitungen der Funktion f bestimmt. Diese sind

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1, \\ f''(x) &= -x + 2, \\ f'''(x) &= -1. \end{aligned}$$

Ein Kandidat für eine Wendestelle ist die Nullstelle der zweiten Ableitung:

$$f''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad = -x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

Der Graph der Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt, weil gilt:

$$f'''(2) = -1 \neq 0.$$

Für den zugehörigen Funktionswert gilt:

$$f(2) = -\frac{1}{6} \cdot 2^3 + 2^2 - 2 = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}.$$

Lösungen

Der Wendepunkt des Graphen von f besitzt die Koordinaten $W\left(2\middle|\frac{2}{3}\right)$.

➤ *Berechnung der Tangentensteigung an der Stelle $x = 2$*

Die Steigung der Tangente im Wendepunkt entspricht dem Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle:

$$f'(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

➤ *Überprüfung der Werte*

Die Gerade $y = x + b$ hat ebenfalls die Steigung 1. Sie ist somit die Tangente im Wendepunkt, wenn zusätzlich der Punkt W auf der Geraden liegt. Einsetzen der Koordinaten von W ergibt:

$$\frac{2}{3} = 2 + b \quad \Longleftrightarrow \quad b = -\frac{4}{3}.$$

Die Tangente an den Graphen von f im Wendepunkt hat die Gleichung

$$y = x - \frac{4}{3}$$

und stimmt mit dem angegebenen Ergebnis überein.

Lösung zu Aufgabe 5

(1) Die Aussage ist wahr, denn laut Abbildung hat der Graph von F an der Stelle $x = 1$ eine doppelte Nullstelle beziehungsweise einen Tiefpunkt. Daraus folgt $F(1) = 0$ und $f(1) = 0$.

(2) Die Aussage ist falsch, denn aus der Abbildung kann abgelesen werden:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = 4 - 2 = 2 \neq 4.$$

(3) Die Aussage ist wahr, denn der Graph von F ist stetig, hat bei $x = -1$ einen Hochpunkt und bei $x = 1$ einen Tiefpunkt. Daraus folgt, dass in diesem Intervall eine Wendestelle vorhanden sein muss. Folglich muss der Graph von f' in diesem Intervall eine Nullstelle haben.

(4) Die Aussage ist falsch, denn laut Abbildung gilt $F(-2) = 0$ und die Tangente an den Graphen von F hat an der Stelle $x = 0$ eine negative Steigung. Daraus folgt

$$f(F(-2)) = f(0) = F'(0) < 0.$$

Lösung zu Aufgabe 6

a) Es soll untersucht werden, ob es auf der Geraden g einen Punkt mit drei gleichen Koordinaten gibt, also einen Punkt $(t|t|t)$ mit $t \in \mathbb{R}$. Um t zu bestimmen, wird folgende Gleichung gelöst:

$$\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Das zu lösende Gleichungssytem lautet

$$\begin{aligned} &(\text{I}) && t = 3 + r \\ &(\text{II}) && t = 4r \\ &(\text{III}) && t = 1 + 3r. \end{aligned}$$

Dieses LGS ist überbestimmt, das heißt, die Anzahl der Gleichungen ist größer als die Anzahl der Variablen. Deshalb werden nur die ersten beiden zur Berechnung von t und r verwendet. Anhand der dritten Gleichung wird das Ergebnis überprüft.

$$\begin{aligned} (\text{I}) \quad & t = 3 + r \\ (\text{IV}) = (\text{I}) - (\text{II}) \quad & 0 = 3 - 3r. \end{aligned}$$

Nun können die Werte direkt berechnet werden:

$$\begin{aligned} (\text{IV}) \quad & 0 = 3 - 3r \quad \Longleftrightarrow \quad r = 1 \\ (\text{I}) \quad & t = 3 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 4. \end{aligned}$$

Die Werte werden zur Probe in die dritte Gleichung eingesetzt:

$$(\text{III}) \quad 4 = 1 + 3 \cdot 1 = 4.$$

Die dritte Gleichung ist ebenfalls erfüllt. Somit ist $(4|4|4)$ ein Punkt auf g, der drei identische Koordinaten hat.

b) Die gesuchte Gerade h verläuft durch Q sowie den Schnittpunkt S mit der Geraden g. Der Ortsvektor $\vec{S}$ hat somit die Form

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_S \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da sich g und h orthogonal schneiden, muss das Skalarprodukt des Richtungsvektors $\overrightarrow{QS}$ von h und des Richtungsvektors von g gleich 0 sein. Es ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{S} - \vec{Q}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r_S \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}\right) \\ &= 1 \cdot (3 + r_S \cdot 1 - 8) + 4 \cdot (r_S \cdot 4 - 5) + 3 \cdot (1 + r_S \cdot 3 - 10) \\ &= 26 \cdot r_S - 52 \\ \Longleftrightarrow \quad & r_S = 2 \\ \Longrightarrow \quad & \vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lösungen

Somit ergibt sich für die gesuchte Gerade h:

$$h:\quad \vec{x} = \vec{Q} + t \cdot \left(\vec{S} - \vec{Q}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Aufgabe 7

Der Abstand d einer Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ zu einem Punkt $P(x|y|z)$ kann wie folgt berechnet werden:

$$d = \frac{|n_1x + n_2y + n_3z - a|}{|\vec{n}_E|} \quad \text{mit} \quad |\vec{n}_E| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$$

Allgemein ist eine Gleichung einer zu E parallelen Ebene H gegeben durch

$$H:\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = a.$$

Wegen

$$|\vec{n}_E| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{81} = 9$$

ist die Hessesche Normalenform der Ebene H gegeben durch:

$$H:\ \frac{4}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 + b = 0.$$

hierbei gibt b den gerichteten Abstand der Ebene H zum Ursprung an. In den gesuchten Ebenengleichungen ist somit $b = 2$ oder $b = -2$, und es gilt:

$$F: \frac{4}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 + 2 = 0$$

$$G: \frac{4}{9}x_1 + \frac{4}{9}x_2 + \frac{7}{9}x_3 - 2 = 0$$

oder, nach Multiplikation mit 9 und Umstellung in die Koordinatenform,

$$F: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$$

$$G: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18.$$

Lösung zu Aufgabe 8

a) Im Folgenden wird mit der Zufallsvariable Z die Zahl beim Drehen des Glücksrades bezeichnet. Zu finden sind Teilmengen von $\{1, 2, 3, 4\}$, sodass sich die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse zu 0,7 summieren. Es gelten:

(I) $0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}3 = P(Z = 1) + P(Z = 3) = P(Z \in \{1, 3\})$,

(II) $0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 = P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 4) = P(Z \in \{1, 2, 4\})$.

Die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

E_1 : „Es wird eine ungerade Zahl gedreht“.

und

E_2 : „Es wird keine 3 gedreht“.

betragen also $P(E_1) = P(E_2) = 0{,}7$.

b) Die Wahrscheinlichkeit, auf dem veränderten Glücksrad eine 1 zu erdrehen, wird mit $P(Z = 1) = p$ bezeichnet. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine 2 zu erdrehen, gegeben durch

$$P(Z = 2) = 1 - P(Z \in \{1, 3, 4\}) = 1 - p - 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}5 - p.$$

Damit das Spiel fair ist, muss der Erwartungswert des Gewinns gleich dem Einsatz sein. Es muss also gelten

$$\begin{aligned} 1 \cdot p + 2 \cdot (0{,}5 - p) + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 &= 2{,}5 \\ p - 2p + 1 + 0{,}9 + 0{,}8 &= 2{,}5 \\ -p + 2{,}7 &= 2{,}5 \\ p &= 0{,}2 \end{aligned}$$

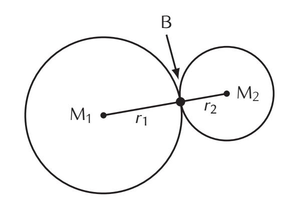
und damit

$$P(Z = 2) = 0{,}5 - p = 0{,}3.$$

Für ein faires Spiel betragen die Wahrscheinlichkeiten also

$$P(Z = 1) = 0{,}2 \quad \text{und} \quad P(Z = 2) = 0{,}3.$$

Lösung zu Aufgabe 9



Der gesuchte Punkt B liegt auf der Strecke zwischen M_1 und M_2. Der Abstand von M_1 zu B entspricht dem Radius r_1. Somit wird der Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ auf r_1 skaliert und zu M_1 addiert.

Die Länge des Vektors $\overrightarrow{M_1M_2}$ beträgt $r_1 + r_2$, da B auf der Strecke von M_1 nach M_2 liegt und die Länge r_1 von M_1 bzw. r_2 von M_2 entfernt ist.

Die Koordinaten des Punktes B ergeben sich aus der Berechnung des Vektors

$$\vec{B} = \vec{M_1} + r_1 \cdot \frac{1}{r_1 + r_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}.$$

☞ *Alternative:* Analog ist der Ansatz mit M_2 und dem Radius r_2 möglich. Die Koordinaten von B ergeben sich dann aus:

$$\vec{B} = \vec{M_2} - r_2 \cdot \frac{1}{r_1 + r_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}.$$

Durch das Minuszeichen vor r_2 zeigt der Vektor $\overrightarrow{M_1M_2}$ in entgegengesetzte Richtung. Beide Formeln entsprechen auch der allgemeinen Gleichung für einen Punkt B, der die Strecke von M_1 nach M_2 im Verhältnis r_1 zu r_2 teilt:

$$\vec{B} = \frac{r_1\vec{M_2} + r_2\vec{M_1}}{r_1 + r_2}.$$

Lösungen zu Pflichtteil, 2015

Lösung zu Aufgabe 1

Die Funktion f ist eine Verkettung von Funktionen $u(v(x))$. Die innere Funktion v und die äußere Funktion u sind dabei gegeben durch:

$$v(x) = 4 + e^{3x} \quad \text{und} \quad u(x) = x^5$$

Es gelten

$$v'(x) = 3e^{3x} \quad \text{und} \quad u'(x) = 5x^4$$

Nach der Kettenregel kann nun die Ableitung der Funktion f bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(4 + e^{3x})^4 \cdot (e^{3x} \cdot 3) \\ &= 15e^{3x}(4 + e^{3x})^4. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Um den Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi} \left(4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right) \, dx$$

zu berechnen, wird zunächst eine Stammfunktion G der Funktion g mit

$$g(x) = 4x - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

gebildet. Es gilt:

$$G(x) = 2x^2 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

und damit:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(4x - \sin\frac{1}{2}\right) \, dx &= \left[2x^2 + 2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^{\pi} \\ &= 2\pi^2 + 2\cos\frac{\pi}{2} - (0 + 2\cos 0) \\ &= 2\pi^2 + 2 \cdot 0 - (0 + 2 \cdot 1) \\ &= 2\pi^2 - 2. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist ein Produkt genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Es gilt

$$(x^3 - 3x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - 3x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{2x} - 5 = 0.$$

Für den ersten Fall gilt:

$$x^3 - 3x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 3) = 0.$$

Eine erneute Anwendung des Satzes vom Nullprodukt liefert:

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 3 = 0.$$

Aus dem ersten Fall ergeben sich die folgenden Lösungen:

$$x_1 = 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3} \quad \text{also} \quad x_2 = \sqrt{3}, \quad x_3 = -\sqrt{3}.$$

Für den zweiten Fall gilt:

$$e^{2x} - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = \ln 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln 5.$$

Daraus ergibt sich die vierte mögliche Lösung

$$x_4 = \frac{1}{2}\ln 5.$$

Die Gleichung hat also die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{-\sqrt{3}, 0, \frac{\ln 5}{2}, \sqrt{3}\right\}.$$

Lösung zu Aufgabe 4

Eine allgemeine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades lautet

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Für die Ableitung dieser Funktion gilt:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Die Informationen aus dem Text müssen nun als Bedingungen an die Funktion und letztlich als Gleichungen aufgestellt werden. Grundsätzlich gilt, dass immer so viele Bedingungen gefunden werden müssen, wie Parameter in der Funktion vorhanden sind. In diesem Fall müssen also mindestens vier Bedingungen aufgestellt werden.

Die Information „Der Graph der Funktion hat im Ursprung einen Hochpunkt." liefert die ersten beiden Bedingungen:

(1) Der Graph der Funktion verläuft durch den Punkt $(0|0)$.

(2) Die Ableitung an dieser ist Stelle 0.

$$\begin{aligned} f(0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 0. \\ f'(0) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $c = d = 0$.

Die Information „Der Graph der Funktion hat bei $x = 2$ eine Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 12$." liefert die restlichen beiden Bedingungen:

(3) Da die Steigung einer Tangente in einem Punkt mit dem Wert der Ableitung an dieser Stelle übereinstimmt, beträgt die Steigung an der Stelle $x = 2$ gerade 4:

$$\begin{aligned} f'(2) = 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3a \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 + c = 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad 12a + 4b + c = 4. \end{aligned}$$

Lösungen

Da schon bekannt ist, dass $c = 0$ ist, ergibt sich:

$$\text{(I)}: \quad 12a + 4b = 4.$$

(4) Der Punkt, an dem die Tangente anliegt, ist sowohl Punkt der Tangente als auch Punkt des Graphen von f. Diesen Punkt erhält man, indem man $x = 2$ in die Tangentengleichung einsetzt:

$$y = 4 \cdot 2 - 12 = -4.$$

Damit muss der Punkt (2|-4) auch auf dem Graphen der Funktion liegen und die vierte Bedingung lautet somit:

$$f(2) = -4 \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -4.$$

Und da schon bekannt ist, dass $c = d = 0$, folgt:

$$\text{(II)}: \quad 8a + 4b = -4.$$

Es ist somit noch folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} \text{(I)}: &\quad 12a + 4b = 4 \\ \text{(II)}: &\quad 8a + 4b = -4. \end{aligned}$$

Zum Lösen des Gleichungssystems kann jetzt das Einsetzungs-, Gleichsetzungs- oder Additionsverfahren angewandt werden. Da der Koeffizient vor dem b bei beiden Gleichungen gleich ist, bietet es sich hier an, die zweite von der ersten Gleichung abzuziehen. Man erhält:

$$\text{(I) - (II)}: \quad 4a = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 2$$

Einsetzen in (I) liefert dann

$$\begin{aligned} & 12 \cdot 2 + 4b = 4 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4b = -20 \\ \Longleftrightarrow \quad & b = -5. \end{aligned}$$

Werden nun die ermittelten Parameter eingesetzt, ergibt sich die folgende Gleichung der gesuchten Funktion f:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2.$$

Lösung zu Aufgabe 5

(1) Die Aussage ist wahr: Die Ableitungsfunktion hat bei $x = -3$ eine Nullstelle und wechselt dort auch das Vorzeichen von - zu +, damit hat der Graph der Funktion f bei $x = -3$ einen Tiefpunkt.

(2) Die Aussage ist wahr: Es gilt $f'(x) > 0$ für $-3 < x < 0$. Der Graph von f ist folglich auf dem Intervall $]-3; 0[$ streng monoton wachsend. Daraus folgt also $f(-2) < f(-1)$.

(3) Die Aussage ist falsch: Der Graph von f' hat an der Stelle $x = -2$ einen Hochpunkt. Daher muss $f''(-2) = 0$ gelten. Weiter geht aus der Abbildung hervor, dass $f'(-2) = 2$ gilt. Damit folgt

$$f''(-2) + f'(-2) = 0 + 2 = 2 > 1.$$

(4) Die Aussage ist wahr: Die Funktion f ist ganzrational und damit auch die Funktion f'. Der Graph von f' hat im angezeigtem Abschnitt – und somit insgesamt mindestens – zwei Extrempunkte. Daher ist der Grad von f' mindestens drei. Somit ist die Funktion f mindestens vierten Grades.

Lösung zu Aufgabe 6

a) Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn zwei Seiten gleich lang sind.

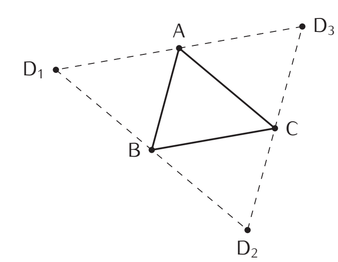
$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{32}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6-4 \\ 6-0 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6-0 \\ 6-4 \\ 2-4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{44}.$$

Da $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ ist das Dreieck gleichschenklig.

b) Ein Parallelogramm hat zwei Paare jeweils gegenüberliegender paralleler Seiten. Eine Seite jedes Paares ist hierbei eine Seite des Dreiecks ABC.



Dann ergibt sich beispielsweise der Punkt D_1, in dem an den Vektor vom Ursprung zum Punkt A der Vektor $\overrightarrow{CB}$ angesetzt wird:

$$\overrightarrow{D_1} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Derselbe Punkt ergibt sich, wenn vom Ursprung zum Punkt B begonnen und dann der Vektor $\overrightarrow{CA}$ addiert wird.

Es gibt noch zwei weitere Punkte, die das Dreieck zu einem Parallelogramm vervollständigen können:

$$\overrightarrow{D_2} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\overrightarrow{D_3} = \overrightarrow{C} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 7

a) Da in der Ebenengleichung der Koeffizient vor x_2 in diesem Fall 0 ist, verläuft die Ebene parallel zur x_2-Achse. Somit hat die Ebene nur die beiden folgenden Spurpunkte:

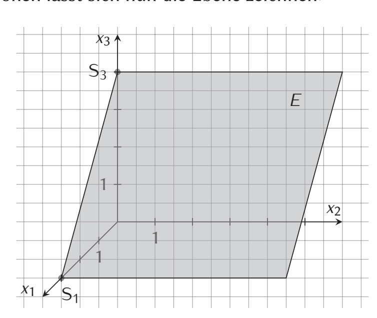
Für $x_2 = x_3 = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt der Ebene mit der x_1-Achse:

$$4x_1 + 3 \cdot 0 = 12$$
$$x_1 = 3$$
$$\Longrightarrow \quad S_1(3|0|0)\,.$$

Für $x_1 = x_2 = 0$ ergibt sich der Schnittpunkt der Ebene mit der x_3-Achse::

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot x_3 = 12$$
$$x_3 = 4$$
$$\Longrightarrow \quad S_3(0|0|4)\,.$$

Mit diesen Informationen lässt sich nun die Ebene zeichnen:



b) Den Abstand eines Punktes P von einer Ebene $E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ erhält man mit Hilfe der Hesseschen Normalenform:

$$d(\mathrm{P}; E) = \frac{|n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - a|}{|\vec{n}|} = \frac{|n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 - a|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Der Punkt P soll auf der x_3-Achse liegen. Es gilt also $x_1 = x_2 = 0$ und somit ist nur die x_3-Koordinate zu bestimmen: $\mathrm{P}(0|0|t)$.

Da der Abstand $d(\mathrm{P}; E) = 3$ betragen soll, ist folgende Gleichung zu lösen:

$$3 = \frac{|4 \cdot 0 + 3 \cdot t - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 3 = \frac{|3t - 12|}{5}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 15 = |3t - 12|\,.$$

Also:

$$3t - 12 = 15 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 9$$
$$3t - 12 = -15 \quad \Longrightarrow \quad t_2 = -1.$$

Die Koordinaten der gesuchten Punkte sind $\mathrm{P}_1(0|0|9)$ und $\mathrm{P}_2(0|0|-1)$.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Das Experiment hat genau zwei Ausgänge:

(1) Rot (mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 20\,\%$)

(2) Nicht Rot.

Da die Wahrscheinlichkeit für Rot bei jeder Durchführung des Experiments gleich bleibt und die Ereignisse unabhängig voneinander sind, ist die Zufallsgröße X binomialverteilt.

b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens dreimal Rot angezeigt wird, wird über die Gegenwahrscheinlichkeit, höchstens zweimal wird Rot angezeigt, bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit für die genaue Trefferanzahl wird der Tabelle entnommen. Die Formel für die Binomialverteilung kann hier nicht angewandt werden, da die Anzahl n der Durchführungen nicht bekannt ist.

$$P(X \leq 3) = 1 - (P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0))$$
$$= 1 - (0{,}14 + 0{,}06 + 0{,}01)$$
$$= 1 - 0{,}21$$
$$= 0{,}79.$$

c) Der Erwartungswert E einer binomialverteilten Zufallsvariable X berechnet sich als Produkt der Anzahl an Durchführungen n und der Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer

$$E = n \cdot p.$$

Für die angegebenen Werte gilt:

$$n = 20 : E = 20 \cdot 0{,}2 = 4$$
$$n = 25 : E = 25 \cdot 0{,}2 = 5$$
$$n = 30 : E = 30 \cdot 0{,}2 = 6.$$

In jedem der Fälle ist der Erwartungswert ganzzahlig. Bei ganzzahligem Erwartungswert nimmt eine Binomialverteilung ihr Maximum beim Erwartungswert an. Der Maximalwert der der Tabelle zugrunde liegenden Verteilung von X wird bei $k = 4$ angenommen, also dem Erwartungswert für $n = 20$. Somit liegt der Tabelle ein Stichprobenumfang von $n = 20$ zugrunde.

Lösung zu Aufgabe 9

Ein Ausdruck der Form

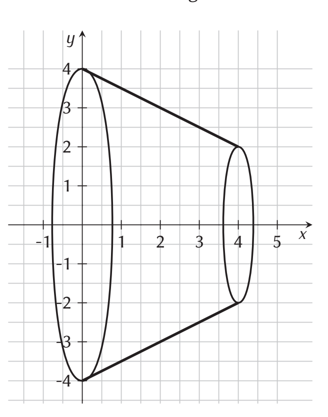
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

gibt den Volumeninhalt des Rotationskörpers an, den man erhält, wenn man der Graph der Funktion f im Intervall $[a; b]$ um die x-Achse rotiert. Die Funktion

$$f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$$

ist linear mit dem y-Achsenabschnitt $c = 4$ und der Steigung $m = -\frac{1}{2}$. Sie lässt sich mit Hilfe eines Steigungsdreiecks oder eines zweiten Punktes, zum Beispiel $(4|2)$ in ein Koordinatensystem einzeichnen.

Der Geradenabschnitt rotiert im Intervall $[0; 4]$ um die x-Achse und es entsteht ein Kegelstumpf. Im folgenden Schaubild ist dieser Sachverhalt dargestellt.



Lösungen zu Pflichtteil, 2014

Lösung zu Aufgabe 1

Die Funktion f ist ein Produkt von Funktionen $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Die beiden Funktionen u und v sind dabei gegeben durch

$$u(x) = \sqrt{x} \quad \text{und} \quad v(x) = e^{2x}.$$

Es gelten:

$$u'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad v'(x) = 2 \cdot e^{2x}.$$

Nach der Produktregel kann nun die Ableitung der Funktion f bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{2x} + x^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \cdot e^{2x} \\ &= e^{2x} \left(\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= e^{2x} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} \right). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Die zu integrierende Funktion lässt sich zunächst umformen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4}{(2x+1)^3} \\ &= 4 \cdot (2x+1)^{-3}. \end{aligned}$$

Um die Stammfunktion zu bilden, wird die Regel für die Stammfunktion von linear verketteten Funktionen benutzt. Diese lautet:

$$f(x) = g(mx + b)$$

$$F(x) = \frac{1}{m} \cdot G(mx + b).$$

In diesem Fall ist die äußere Funktion

$$g(x) = 4 \cdot x^{-3}.$$

Eine Stammfunktion von g ergibt sich durch die Potenzregel für Stammfunktionen und lautet:

$$G(x) = 4 \cdot \frac{1}{-2} x^{-2} = -2 \cdot x^{-2}.$$

Weiter ist

$$mx + b = 2x + 1.$$

Eine Stammfunktion von f lautet somit

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{-2}(2x+1)^{-2} = -(2x+1)^{-2} = \frac{-1}{(2x+1)^2}.$$

Lösungen

Damit lässt sich der Wert des Integral nun berechnen:

$$\int_0^1 \frac{4}{(2x+1)^3}\,dx = \left[\frac{-1}{(2x+1)^2}\right]_0^1$$
$$= \frac{-1}{(2\cdot 1+1)^2} - \frac{-1}{(2\cdot 0+1)^2}$$
$$= \frac{-1}{9} - \frac{-1}{1}$$
$$= \frac{8}{9}.$$

Lösung zu Aufgabe 3

Die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$ kann umgeformt werden zur Gleichung

$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$

Es handelt sich hierbei um eine biquadratische Gleichung, die sich mithilfe der Substitution $u = x^2$ lösen lässt. Zu lösen ist folgende Gleichung:

$u^2 - 3u - 4 = 0.$

Diese quadratische Gleichung kann nun mit der Mitternachtsformel gelöst werden:

$$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1}$$
$$= \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$= \frac{3 \pm 5}{2}.$$

Damit gilt also

$u_1 = -1$ und $u_2 = 4.$

Die Rücksubstitution liefert nun die Lösungen der ursprünglichen Gleichung

$x^2 = -1,$ diese Gleichung hat keine Lösungen.

und $x^2 = 4 \iff x_1 = -2$ und $x_2 = 2.$

Die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$ besitzt die Lösungsmenge

$\mathcal{L} = \{-2; 2\}.$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Der Graph einer Funktion g der Form

$g(x) = a\cos bx + c$

entsteht aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = \cos x$ durch Streckung/Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$, Streckung/Stauchung in y-Richtung um den Faktor a und anschließende Verschiebung in y-Richtung um c.

Den Graphen der angegebenen Funktion erhält man somit, indem man den Graphen der Funktion $f(x) = \cos x$

- um den Faktor $\frac{2}{\pi}$ in x-Richtung streckt,
- um den Faktor 2 in y-Richtung streckt und
- um 2 Längeneinheiten in negative y-Richtung verschiebt, also um 2 nach unten verschiebt.

Hierbei ist zu beachten, dass die Verschiebung in y-Richtung erst nach der Streckung in y-Richtung erfolgt.

b) Es gilt

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 = 0$$
$$\iff 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2$$
$$\iff \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1.$$

Der Kosinus nimmt den Wert 1 bei $\ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, also bei allen ganzzahligen Vielfachen von 2π an. Es muss daher ermittelt werden, wann $\frac{\pi}{2}x$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist:

$$\frac{\pi}{2}x = k\cdot 2\pi$$
$$x = k\cdot 2\pi\cdot\frac{2}{\pi}$$
$$x = 4k,$$

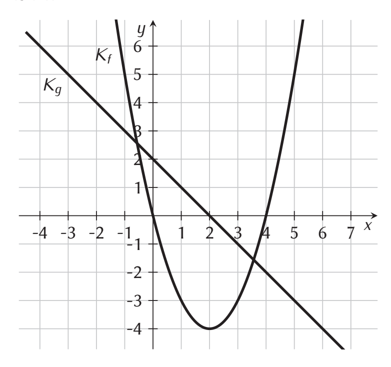
für $k \in \mathbb{Z}$.

Für $k = 0$ und $k = 1$ ergeben sich die Lösungen für die Nullstellen der gegebenen Gleichung im Bereich $0 \le x \le 4$:

$x_1 = 0$ und $x_2 = 4.$

Lösung zu Aufgabe 5

a) ➤ *Bestimmung von $f(g(3))$*



Lösungen

Dafür ist zunächst der Funktionswert der inneren Funktion an der Stelle $x = 3$, also $g(3)$, aus dem Graphen K_g abzulesen. Es gilt:

$g(3) = -1$.

Somit ist $f(g(3)) = f(-1)$. Dieser Wert lässt sich nun am Graphen K_f ablesen

$f(g(3)) = f(-1) = 5$.

➤ *Lösungen der Gleichung* $f(g(x)) = 0$

Dafür sind zunächst die Nullstellen der Funktion f zu bestimmen. Aus dem Schaubild kann abgelesen werden:

$f(0) = 0$ und $f(4) = 0$.

Gesucht sind daher diejenigen Werte für x mit

$g(x) = 0$ oder $g(x) = 4$.

Die Abbildung zeigt:

$g(2) = 0$ also $f(g(2)) = f(0) = 0$.
$g(-2) = 4$ also $f(g(-2)) = f(4) = 0$.

Für $x = 2$ oder $x = -2$ gilt $f(g(x)) = 0$.

b) Zunächst lässt sich allgemein die Ableitung der Funktion h mithilfe der Produktregel bilden:

$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Die Werte für $g(2)$ und $f(2)$ lassen sich auch hier mithilfe der Graphen K_g und K_f ermitteln:

$g(2) = 0$ und $f(2) = -4$.

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 2$ ein Minimum. Daher besitzt die Ableitung von f an dieser Stelle eine Nullstelle:

$f'(2) = 0$.

Aus dem Schaubild kann abgelesen werden, dass der Graph K_g zu einer linearen Funktion g gehört. Die Steigung m lässt sich mit einem Steigungsdreieck ermitteln. Es folgt

$m = -1$.

Somit ist

$g'(2) = -1$.

Diese Werte können nun in die Ableitungsfunktion von h eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} h'(2) &= f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2) \\ &= 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

☞ *Alternative:* Die Funktionsterme der Funktionen f und g sind leicht zu bestimmen:

$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 4)$ und $g(x) = -x + 2$.

Wegen $f(2) = -4$ gilt $a = 1$ und

$f(x) = x^2 - 4x \implies f'(x) = 2x - 4$.

Hiermit lässt sich $h'(2)$ bestimmen:

$$\begin{aligned} h'(2) &= f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2) \\ &= 0 \cdot 0 + (-4) \cdot (-1) \\ &= 4. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 6

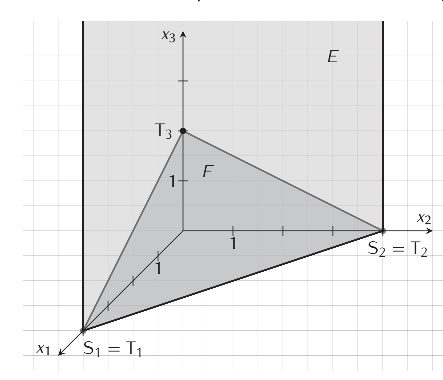
a) Auch wenn in dieser Aufgabe nur nach der unten dargestellten Zeichnung verlangt ist, sei hier kurz das Vorgehen beschrieben:

Um eine Ebene zu skizzieren wird nach den Spurpunkten gesucht. Also nach den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen. Dafür werden zwei Koordinaten in der Ebenengleichung gleich 0 gesetzt und die dritte Koordinate wird berechnet. Für die Ebene E sind das:

- Für $x_2 = x_3 = 0$ ist $x_1 = 4$. Schnittpunkt S_1 mit der x_1-Achse: $S_1(4|0|0)$.
- Für $x_1 = x_3 = 0$ ist $x_2 = 4$. Schnittpunkt S_2 mit der x_2-Achse: $S_2(0|4|0)$.
- Für $x_1 = x_2 = 0$ ist $0 = 4$. Die Ebene schneidet die x_3-Achse somit nicht, sondern sie ist parallel zu dieser.

Und für die Ebene F:

- Für $x_2 = x_3 = 0$ ist $x_1 = 4$. Schnittpunkt $T_1 = S_1$ mit der x_1-Achse: $T_1(4|0|0)$.
- Für $x_1 = x_3 = 0$ ist $x_2 = 4$. Schnittpunkt $T_2 = S_2$ mit der x_2-Achse: $T_2(0|4|0)$.
- Für $x_1 = x_2 = 0$ ist $x_3 = 2$. Schnittpunkt T_3 mit der x_3-Achse: $T_3(0|0|2)$.



Die Ebenen haben die gleiche Spurgerade: Die Gerade durch $S_1 = T_1$ und $S_2 = T_2$. Verlaufen zwei Ebenen durch dieselbe Gerade, sind sie entweder identisch oder diese Gerade ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.

Da die Ebene F die x_3-Achse schneidet und die Ebene E nicht, muss diese Spurgerade die Schnittgerade von E und F sein. Diese Schnittgerade lässt sich mit Hilfe der beiden Spurpunkten jetzt angeben:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{S_1} + t \cdot \overrightarrow{S_1S_2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 - 4 \\ 4 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Da die Ebene G parallel zur x_1-Achse verläuft, ist der Koeffizient vor x_1 in der Ebenengleichung 0, denn für einen Normalenvektor von G gilt $x_1 = 0$. Ein Ansatz für die Ebenengleichung lautet somit:

$$G: n_2x_2 + n_3x_3 = a.$$

Da die Ebene die x_2x_3-Ebene in der selben Spurgeraden schneidet wie die Ebene F, kann dieser Teil einfach von F übernommen werden und es ist

$$G: x_2 + 2x_3 = 4.$$

☞ *Alternative:* Da die Ebene G die x_2x_3-Ebene in der selben Spurgerade schneidet wie die Ebene F, hat G auch die Spurpunkte T_2 und T_3. Werden diese in die Ebenengleichung eingesetzt, ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$n_2 \cdot 4 + n_3 \cdot 0 = a \iff 4n_2 = a$$

$$n_2 \cdot 0 + n_3 \cdot 2 = a \iff 2n_3 = a.$$

Wird für a nun eine beliebige Zahl ungleich 0 gewählt, so können n_2 und n_3 in Abhängigkeit davon berechnet werden. Für $a = 1$ ist $n_2 = \frac{1}{4}$ und $n_3 = \frac{1}{2}$ und somit

$$G: \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1.$$

Hier wird sofort deutlich, dass diese Gleichung für G ein Vielfaches der ersten Möglichkeit ist.

Lösung zu Aufgabe 7

Zunächst wird eine Gleichung der Geraden g durch die Punkte A und B bestimmt:

$$g: \vec{x} = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 - 1 \\ 13 - 10 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Abstand vom Punkt C zu Geraden g kann mit dem Lotfußpunktverfahren bestimmt werden. Dafür wird eine Hilfsebene E gebildet, die von der Geraden g senkrecht geschnitten wird und den Punkt C enthält. Dass die Hilfsebene senkrecht schneidet, bedeutet, dass der Richtungsvektor der Geraden oder ein Vielfaches davon als Normalenvektor der Ebene verwendet wird. Ein Ansatz für die Hilfsebene E in Koordinatengleichung lautet dann

$$E: -4x_1 + 3x_2 = a.$$

Da C ein Punkt der Hilfsebene sein soll, kann a bestimmt werden, indem C in die vorläufige Koordinatenform eingesetzt wird:

$$-4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 1.$$

Eine Gleichung der Hilfsebene E ist:

$$E: -4x_1 + 3x_2 = 1.$$

Der Lotfußpunkt L, also der Punkt der Geraden g, der zu C den geringsten Abstand hat, ist dann der Schnittpunkt der Geraden g mit der Hilfsebene E:

$$-4 \cdot (1 + t \cdot (-4)) + 3(10 + t \cdot 3) = 1$$

$$-4 + 16t + 30 + 9t = 1$$

$$25t = -25$$

$$t = -1.$$

Wird $t = -1$ in die Geradengleichung g gesetzt, ergibt sich der Lotfußpunkt L:

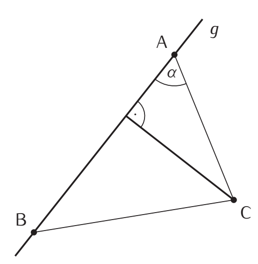
$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt besitzt die Koordinaten L(5|7|1). Der Abstand von C zu g ist dann die Länge des Verbindungsvektors zwischen C und L:

$$d(C, g) = \left|\overrightarrow{LC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 3 - 7 \\ 1 - 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Der Abstand von C zur Geraden durch A und B beträgt 5 LE.

☞ *Alternative:* Im folgenden Schaubild sind die Punkte A, B, C und die Gerade g dargestellt.



Beschreibt α den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$ im Dreieck, so berechnet sich der Abstand von C zur Geraden durch A und B als

$$d(C; g) = d(A; C) \cdot \sin(\alpha).$$

Zugang zum Winkel α bekommt man mithilfe der Kosinusformel des Skalarprodukts

$$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} = d(A; C) \cdot d(A; B) \cdot \cos(\alpha)$$

Quadriert man diese Gleichung, so kann man diese umformen und einsetzen:

$$\begin{aligned} d(C; g)^2 &= (d(A; C) \cdot \sin(\alpha))^2 \\ &= d(A; C)^2 \cdot \sin(\alpha)^2 \\ &= d(A; C)^2 \cdot \left(1 - \cos(\alpha)^2\right) \\ &= d(A; C)^2 - (d(A; C) \cdot \cos(\alpha))^2 \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} = d(A; C) \cdot d(A; B) \cdot \cos(\alpha) \\ \Longleftrightarrow \quad & \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{d(A; C) \cdot d(A; B)}. \end{aligned}$$

erhält man:

$$\begin{aligned} d(C; g)^2 &= d(A; C)^2 - \left(d(A; C) \cdot \frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{d(A; C) \cdot d(A; B)}\right)^2 \\ &= d(A; C)^2 - \left(\frac{\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB}}{d(A; B)}\right)^2 \end{aligned}$$

Es gelten:

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 3 - 10 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$d(A; C) = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + 0^2} = \sqrt{50},$$

$$d(A; B) = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) + (-7) \cdot 3 + 0 \cdot 0 = -25.$$

Diese Werte werden in die obige Formel eingesetzt:

$$\begin{aligned} (d(C; g))^2 &= (\sqrt{50})^2 - \left(\frac{-25}{5}\right)^2 \\ &= 50 - \frac{625}{25} \\ &= 25 \end{aligned}$$

Da Abstände immer positiv sind, ist somit der Abstand von C zur Geraden g gleich 5.

Lösung zu Aufgabe 8

a) Es handelt sich bei der angegebenen Wahrscheinlichkeit offensichtlich um die einer kumulierten Binomialverteilung. Für diese gilt allgemein:

$$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X = k + 1) + P(X = k + 2) + \ldots + P(X = n).$$

Dabei werden die einzelnen Wahrscheinlichkeiten mit der Formel für die Binomialverteilung berechnet:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Hier ist k die Trefferanzahl, p die Trefferwahrscheinlichkeit und n die Anzahl Durchführungen.

In dem Fall gibt es offensichtlich $n = 10$ Durchführungen, die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = \frac{2}{3}$.

Achtung: Die Trefferwahrscheinlichkeit beschreibt in diesem Fall die Wahrscheinlichkeit dafür, das Spiel zu verlieren.

Die einzelnen Summanden geben die Wahrscheinlichkeiten an, dass das genau 8 mal, genau 9 mal, bzw. genau 10 mal der Fall ist. Das heißt, das Ereignis A lautet zum Beispiel:

„Mindestens acht von zehn Spielen werden verloren."

b) Die Wahrscheinlichkeit, genau zwei Mal zu verlieren, wird mit der Binomialverteilung berechnet:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Spiele an, die verloren werden. Die Wahrscheinlichkeit für das Verlieren ist $p = \frac{2}{3}$ und die Anzahl der Durchführungen ist $n = 4$. Damit lautet die Formel:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{4-2} \\ &= \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{4}{81} \\ &= 6 \cdot \frac{4}{81} \\ &= \frac{8}{27}. \end{aligned}$$

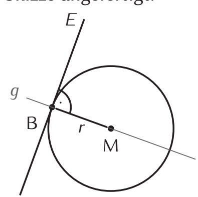
Lösungen

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 29,6 % wird von vier Spielen genau zwei Mal verloren.

Lösung zu Aufgabe 9

a) Der Berührpunkt B der Ebene mit der Kugel ist der Punkt der Ebene, der den kürzesten Abstand zum Mittelpunkt M hat. Der Kugelradius ist gleich dem Abstand zwischen dem Berührpunkt der Ebene mit der Kugel und deren Mittelpunkt.

Zur Veranschaulichung wird eine Skizze angefertigt.



Die gesuchten Werte lassen sich dann wie folgt berechnen:

➤ Es wird eine Gleichung der Lotgeraden g zur Ebene E durch den Mittelpunkt M aufgestellt. Als Richtungsvektor der Geraden g wird also Normalenvektor der Ebene E verwendet und $\overrightarrow{M}$ wird als Stützvektor verwendet.

➤ Der Schnittpunkt von g und E ist der gesuchte Berührpunkt B.

➤ Der gesuchte Kugelradius entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{MB}$, also $r = \left|\overrightarrow{MB}\right|$.

Lösungen zu Pflichtteil, 2013

Lösung zu Aufgabe 1

Die Funktion f ist ein Produkt von Funktionen $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Die beiden Funktionen u und v sind dabei gegeben durch

$$u(x) = 2x^2 + 5 \quad \text{und} \quad v(x) = e^{-2x}.$$

Es gelten:

$$u'(x) = 4x \quad \text{und} \quad v'(x) = -2 \cdot e^{-2x}.$$

Nach der Produktregel kann nun die Ableitung der Funktion f bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x \cdot e^{-2x} + (2x^2 + 5) \cdot \left(-2e^{-2x}\right) \\ &= e^{-2x}\left(4x - 2 \cdot (2x^2 + 5)\right) \\ &= e^{-2x}\left(-4x^2 + 4x - 10\right). \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2

Für die Stammfunktion einer linear verketteten Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot g(mx + b)$$

mit reellen Zahlen a, b und m gilt:

$$F(x) = \frac{a}{m} \cdot G(mx + b) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

falls G eine Stammfunktion von g ist. In diesem Fall gelten:

$$a = 4, \quad m = 2, \quad b = 0 \quad \text{und} g(x) = \sin(x)$$

Für die Stammfunktion G von g gilt

$$G(x) = -\cos(x).$$

Eine allgemeine Stammfunktion F von f lautet

$$F(x) = -\frac{4}{2}\cos(2x) + c = -2\cos(2x) + c.$$

Nun wird $c \in \mathbb{R}$ so bestimmt, dass die Forderung $F(\pi) = 7$ erfüllt ist. Es ist also folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{aligned} & F(\pi) = -2\cos(2\pi) + c = 7 \\ \Longleftrightarrow \quad & -2 \cdot 1 + c = 7 \\ \Longleftrightarrow \quad & c = 9. \end{aligned}$$

Die gesuchte Stammfunktion lautet damit:

$$F(x) = -2\cos(2x) + 9.$$

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 3

Durch Multiplikation der Gleichung mit e^x wird der Term im Nenner beseitigt. Dies verändert wegen

$$e^x > 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

die Lösungsmenge nicht. Man erhält also

$$2e^{2x} - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = \ln(2) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln(2)}{2}.$$

Die Gleichung hat die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{\frac{\ln(2)}{2}\right\}$.

Lösung zu Aufgabe 4

➤ *Schnittstellen von f und g*

Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichung

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Longleftrightarrow \quad -x^2 + 3 &= 2x \\ \Longleftrightarrow \quad 0 &= x^2 + 2x - 3. \end{aligned}$$

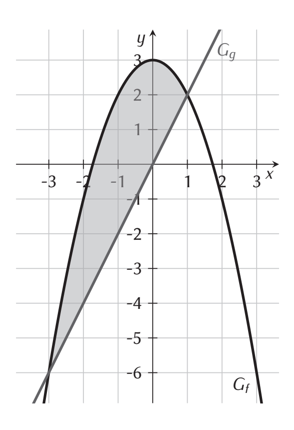
Mithilfe der Mitternachtsformel erhält man:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2.$$

Die Graphen der Funktionen f und g schneiden sich also an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$.

➤ *Berechnung des Flächeninhalts*

Im folgenden Schaubild sind die Graphen der Funktionen f und g und die von beiden Graphen eingeschlossene Fläche skizziert.



Der Flächeninhalt A der, von den beiden Graphen eingeschlossenen, Fläche lässt sich als Integral der Differenz der Funktionen zwischen den Schnittstellen berechnen:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \\ &= \int_{-3}^{1} \left(-x^2 + 3 - 2x\right)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x - x^2\right]_{-3}^{1} \\ &= -\frac{1}{3} + 3 - 1 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-3)^3 + 3 \cdot (-3) - 3^2\right) \\ &= -\frac{1}{3} + 2 - \left(-\frac{1}{3} \cdot (-27) - 9 - 9\right) \\ &= -\frac{1}{3} + 2 - (9 - 18) \\ &= -\frac{1}{3} + 11 \\ &= \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt der, von den beiden Graphen eingeschlossenen, Fläche beträgt $\frac{32}{3}$ Flächeneinheiten.

Lösung zu Aufgabe 5

Die Aussagen haben folgende Bedeutung.

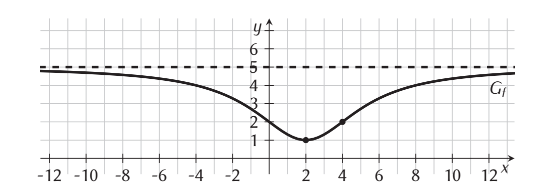
(1) $f(2) = 1$: Der Graph von f verläuft durch den Punkt $P(2|1)$.

(2) $f'(2) = 0$: Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ eine waagrechte Tangente und damit an dieser Stelle einen Extrem- oder Sattelpunkt.

(3) $f''(4) = 0$ und $f'''(4) \neq 0$: Der Graph von f hat an der Stelle $x = 4$ einen Wendepunkt.

(4) Für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 5$: Der Graph von f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 5$.

Die folgende Skizze enthält nur gegebene Informationen, es gibt weitere Möglichkeiten für den Verlauf des Graphen.



Lösungen

Lösung zu Aufgabe 6

➤ *Koordinatengleichung der Ebene E*

Eine Geradengleichung von g lautet

$$g: \vec{x} = \vec{A} + t \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+t\\-1-2t\\3-3t\end{pmatrix}.$$

Der Richtungsvektor von g steht senkrecht auf die Ebene E, kann also als Normalenvektor genutzt werden. Somit ist eine Koordinatengleichung von E gegeben durch:

$$E: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = d$$

Da der Punkt C(4|3|-8) in der Ebene E liegt, muss gelten:

$$d = 4 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-8) = 22$$

Damit ist eine Koordinatengleichung der Ebene E gegeben durch:

$$E: x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 22.$$

➤ *Schnittpunkt von E und g*

Der Schnittpunkt S lässt sich bestimmen, indem man die Koordinaten des zum Parameter t gehörigen Punktes auf g in E einsetzt und nach t auflöst:

$$\begin{aligned} & (1+t)\cdot 1 - 2\cdot(-1-2t) - 3\cdot(3-3t) = 22 \\ \iff\ & 1 + t + 2 + 4t - 9 + 3t = 22 \\ \iff\ & 14t = 28 \\ \iff\ & t = 2. \end{aligned}$$

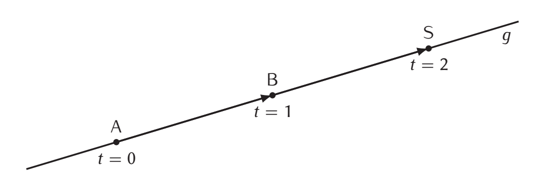
Nun können die Koordinaten des Punktes S berechnet werden, indem $t = 2$ in die Geradengleichung von g eingesetzt wird:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\-3\end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt S der Gerade g und Ebene E hat die Koordinaten S(3|-5|-3).

➤ *Lage des Punktes S*

Der Punkt S liegt genau dann zwischen den Punkten A und B, wenn der Parameter t zwischen 0 und 1 liegt. In diesem Fall ist $t = 2$, somit liegt S nicht zwischen A und B.



Lösung zu Aufgabe 7

➤ *Parallelität der Ebenen E_1 und E_2*

Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn die Normalenvektoren Vielfache voneinander sind. Deshalb wird geprüft, ob die Normalenvektoren ein Vielfaches voneinander sind. Der Normalenvektor der Ebene E_1 lässt sich direkt ablesen und ist gegeben durch:

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor der Ebene E_2 kann zum Beispiel als Kreuzprodukt der Richtungsvektoren berechnet werden:

$$\vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot4-3\cdot0\\0\cdot1-4\cdot1\\1\cdot3-1\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\2\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\vec{n}_{E_2} = 2 \cdot \vec{n}_{E_1}.$$

Damit sind die beiden Ebenen E_1 und E_2 parallel.

☞ *Alternative:* Der Normalenvektor der Ebene E_1 ist gegeben durch:

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

Es gelten:

$$\vec{n}_{E_1} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\cdot1 + (-2)\cdot1 + 0\cdot1 = 0$$

$$\vec{n}_{E_1} \circ \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 2\cdot1 + (-2)\cdot2 + 1\cdot4 = 0.$$

Somit steht der Normalenvektor der Ebene E_1 senkrecht zu den beiden Spannvektoren der Ebene E_2. Somit sind die Ebenen entweder parallel oder identisch. Um den Fall, dass die beiden Ebenen identisch sind, auszuschließen, reicht eine Punktprobe aus. Hierfür wird beispielsweise ein beliebiger Punkt der Ebene E_2 gewählt und überprüft, ob dieser auf der Ebene E_1 liegt. Für die Koordinaten des Stützvektors aus der gegebenen Parametergleichung ergibt sich zum Beispiel:

$$2\cdot7 - 2\cdot7 + 5 = 5 \neq -1.$$

Die Punktprobe ist negativ. Daraus folgt, dass E_1 und E_2 parallel und nicht identisch sind.

➤ *Koordinatengleichung der Ebene E_3*

Die Ebene E_3 ist ebenfalls parallel zu E_1 bzw. E_2. Damit kann der Normalenvektor von E_1 als Normalenvektor von E_3 gewählt werden:

$$\vec{n}_{E_3} = \vec{n}_{E_1}.$$

Nun wird noch ein Punkt, der in E_3 liegt, benötigt. Dieser kann der Mittelpunkt jeder beliebigen Strecke zwischen einem Punkt auf E_1 und einem Punkt auf E_2 sein.

Ein beliebiger Punkt von E_1 lässt sich berechnen, indem man zwei Koordinaten frei wählt, beispielsweise $x_1 = x_2 = 1$, und entsprechend die 3. Koordinate bestimmt:

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + x_3 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 1.$$

Der Punkt A(1|1|-1) liegt auf der Ebene E_1 und ein Punkt von E_2 lautet B(7|7|5).

Somit gilt für den Mittelpunkt M dieser Strecke:

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\7\\5\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Deshalb ist eine Normalengleichung der Ebene E_3 gegeben durch:

$$E_3 : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = 0.$$

Die Koordinatenform lautet:

$$2x_1 - 8 - 2x_2 + 8 + x_3 - 2 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 2.$$

Lösung zu Aufgabe 8

Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten betragen

$$P(\text{„Ass“}) = \frac{4}{9}, \quad P(\text{„König“}) = \frac{3}{9}, \quad P(\text{„Dame“}) = \frac{2}{9}.$$

a) Bei dem Experiment handelt es sich um ein zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen.

➤ *Wahrscheinlichkeit von A*

Bei dem Ereignis A werden die Karten unterschieden zwischen „Ass“ und „kein Ass“. Dabei gilt bei der ersten umgedrehten Karte

$$P(\text{„kein Ass“}) = \frac{5}{9}.$$

Ist die erste umgedrehte Karte kein Ass, so ist diese Wahrscheinlichkeit für die zweite Karte nur noch $\frac{4}{8}$. Folglich lautet die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

$$P(A) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{5}{18}.$$

☞ *Alternative:* Jede Kombination zweier Karten ist gleich wahrscheinlich, hierfür gibt es $\binom{9}{2}$ Möglichkeiten. Da es 5 Karten gibt, die kein Ass sind, umfasst das Ereignis A davon genau $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten. Somit gilt:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

➤ *Wahrscheinlichkeit von B*

Bei dem Ereignis B unterscheidet man zwischen „Dame“ beim ersten Zug, „Ass“ beim zweiten Zug und umgekehrt. Damit gilt

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\text{„Eine Dame und ein Ass auf dem Tisch“}) \\ &= P(\text{„Dame“; „Ass“}) + P(\text{„Ass“;„Dame“}) \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{8} \\ &= \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

☞ *Alternative:* Da vier Asse und zwei Damen vorhanden sind, gibt es $2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten, zwei Karten auszuwählen, sodass eine eine Dame und eine ein Ass ist. Somit gilt für die Wahrscheinlichkeit von B:

$$P(B) = \frac{8}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{26} = \frac{2}{9}$$

b) Wird gleich beim ersten Drehen ein „Ass“ aufgedeckt, dann ist $X = 1$. Deckt man erst die anderen 5 Karten auf und hat erst beim sechsten Drehen ein „Ass“, so ist $X = 6$. Unter den ersten 6 aufgedeckten Karten ist auf jeden Fall ein Ass, sodass größere Werte nicht möglich sind. Also kann die Zufallsvariable X folgende Werte annehmen:

$$X \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, höchstens 2 Karten auf dem Tisch zu haben, beträgt:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= P(\text{„Ass beim 1. Zug“}) + P(\text{„kein Ass beim 1. Zug; Ass beim 2. Zug“}) \\ &= \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \\ &= \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

☞ *Alternative:* Das Gegenereignis, dass mehr als 2 Karten aufgedeckt werden, tritt genau dann ein wenn die ersten beiden Karten kein Ass sind. Die Wahrscheinlichkeit hierfür wurde bereits in Teilaufgabe a) berechnet, folglich ist

$$P(X \leq 2) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}.$$

Lösungen

Lösung zu Aufgabe 9

Der Graph einer Funktion f hat an einer Stelle x_0 genau dann einen Wendepunkt, wenn die zweite Ableitung f'' an dieser Stelle eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel besitzt.

Die zweite Ableitung einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist eine Funktion zweiten Grades:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c.$$

Die Gleichung

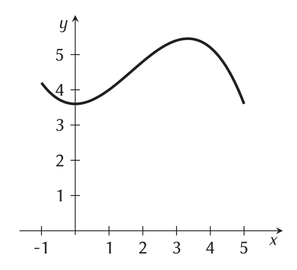
$$f''(x) = 0$$

kann maximal zwei Lösungen haben. Folglich kann der Graph einer Funktion vierten Grades höchstens zwei Wendepunkte besitzen.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe A 1.1

a) Im folgenden Schaubild ist der Graph der Funktion abgebildet.



➤ *Höchster Punkt*

Um die höchste Stelle des Profils, also den Hochpunkt des Graphen, zu ermitteln, muss die erste Ableitung gebildet und deren Nullstellen berechnet werden:

$$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$$
$$f'(x) = -0{,}3x^2 + x = -0{,}3 \cdot x \cdot \left(x - \frac{10}{3}\right)$$

Die Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$ sind nach dem Satz vom Nullprodukt gegeben durch

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{10}{3}$$

Es gelten:

$$f(x_1) = 3{,}6$$
$$f(x_2) = \frac{736}{135} \approx 5{,}45.$$

Die Randwerte $f(-1) = 4{,}2$ und $f(5) = 3{,}6$ sind kleiner. Der höchste Punkt des Profils liegt etwa 545 Meter hoch.

➤ *Breite des Sees*

Wie eben schon berechnet, liegt der Tiefpunkt des Profils bei T$(0|3{,}6)$. Da der See an dieser Stelle 10 Meter tief sein soll, befindet sich die Wasserhöhe bei $y = 3{,}7$. Die Ufer des Sees sind also dort, wo die Funktion den Wert 3,7 annimmt.

$$3{,}7 = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &\approx 4{,}95 \\ x_2 &\approx 0{,}47 \\ x_3 &\approx -0{,}43 \end{aligned}$$

Der erste Wert liegt auf der anderen Seite des höchsten Punktes, ist also ohne Bedeutung. Die Breite des Sees ist somit der Abstand von x_2 und x_3 und beträgt in etwa 90 Meter.

Lösungen

➤ *Lawinengefahr*

Die steilste Stelle zwischen Tief- und Hochpunkt befindet sich am Wendepunkt. Um diesen zu berechnen, muss die Nullstelle der zweiten Ableitung bestimmt werden:

$$f''(x) = -0{,}6x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_W = \frac{10}{6}.$$

Wegen

$$f''(x) = -0{,}6 \neq 0$$

für alle $x \in [-1; 5]$ ist x_W eine Wendestelle. Der Steigungswinkel an der Stelle x_W lässt sich bestimmen, indem zunächst die Steigung des Graphen an der Stelle x_W bestimmt wird:

$$f'(x_W) = -0{,}3 \cdot \left(\frac{10}{6}\right)^2 + \frac{10}{6} = \frac{5}{6}.$$

Für den Winkel α, den die Tangente im Wendepunkt mit der x-Achse einschließt, gilt:

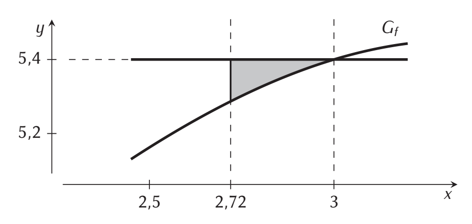
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 39{,}80°$$

An der steilsten Stelle zwischen See und Bergspitze ist die Steigung größer als 30°, deshalb herrscht Lawinengefahr.

b) Die Oberkante verläuft auf 540 Metern Höhe, ab dort ist die Wand sichtbar. Man bestimmt also zunächst mit einem GTR diejenigen Stellen, an denen die Funktion den Wert 5,4 annimmt:

$$5{,}4 = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6 \quad \Longrightarrow \quad x_1 \approx -1{,}65$$
$$x_2 \approx 3{,}65$$
$$x_3 = 3$$

Da sich das Gebäude zwischen dem höchsten Punkt ($x \approx 3{,}33$) und dem Tal ($x = 0$) befindet, kommt von diesen Lösungen nur x_3 in Frage. Die sichtbare Oberkante verläuft also bezogen auf die x-Richtung zwischen 300 - 28 = 272 und 300 Metern.



Die gesuchte Fläche ist also die Fläche zwischen dem Graphen von f und der Geraden mit $y = 5{,}4$ zwischen den Werten 2,72 und 3. Diese ist der Wert des folgenden Integrals:

$$\int_{2{,}72}^{3} (5{,}4 - f(x))\,\mathrm{d}x = \int_{2{,}72}^{3} \left(-0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 1{,}8\right)\,\mathrm{d}x \approx 0{,}0145.$$

Eine Flächeneinheit sind hier 100 m · 100 m, also 10 000 m². Die sichtbare Fläche der Wand ist also 145 m² groß und somit größer als 130 m².

c) Bei dieser Aufgabe zur Funktionsbestimmung wird eine Funktion zweiten Grades gesucht, also

$$p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Da die gesuchte Parabel ohne Knick an das bis $x = 5$ definierte Profil anschließen soll, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$f(5) = p(5) \quad \text{und} \quad f'(5) = p'(5).$$

Der Scheitel der gesuchten Parabel soll bei $x = 6$ liegen, also gilt außerdem

$$p'(6) = 0.$$

Aus diesen drei Bedingungen lassen sich drei lineare Gleichungen finden, die alle erfüllt sein müssen. Das entstandene Gleichungssystem kann mit einem GTR oder von Hand gelöst werden.

Zunächst werden $f(5)$ und $f'(5)$ berechnet.

$$f(5) = 3{,}6$$
$$f'(5) = -2{,}5$$

Diese Wertepaare werden eingesetzt in die Gleichungen

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

und

$$p'(x) = 2ax + b.$$

Man erhält

$$a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 3{,}6$$
$$2 \cdot a \cdot 5 + b = -2{,}5$$
$$2 \cdot a \cdot 6 + b = 0.$$

Damit folgt als zu lösendes Gleichungssystem

$$\text{(I)} \quad 25a + 5b + c = 3{,}6$$
$$\text{(II)} \quad 10a + b = -2{,}5$$
$$\text{(III)} \quad 12a + b = 0.$$

Dies führt zu den Lösungen $a = 1{,}25$, $b = -15$ und $c = 47{,}35$. Die Funktionsgleichung der gesuchten Parabel ist gegeben durch

$$p(x) = 1{,}25x^2 - 15x + 47{,}35.$$

Um die Höhe, also den y-Wert des Scheitelpunktes zu berechnen, wird der Wert $p(6)$ bestimmt:

$$p(6) = 2{,}35.$$

Der tiefste Punkt des benachbarten Tales liegt also auf 235 Metern.

☞ *Alternative:* Betrachtet man die Funktionsgleichung von p in der Scheitelpunktform

$$p(x) = r \cdot (x - x_S)^2 + t,$$

so ist der Parameter $x_S = 6$ als x-Wert des Scheitelpunktes bereits gegeben und t ist als

y-Wert des Scheitelpunktes die gesuchte Talhöhe. Aus der Bedingung

$$p'(5) = f'(5) = -2{,}5$$

lässt sich r berechnen:

$$p'(5) = 2r \cdot (5 - 6) = -2{,}5 \implies r = 1{,}25.$$

Die zweite Bedingung $p(5) = f(5) = 3{,}6$ liefert nun

$$p(5) = 1{,}25 \cdot (5 - 6)^2 + t = 3{,}6 \iff t = 2{,}35.$$

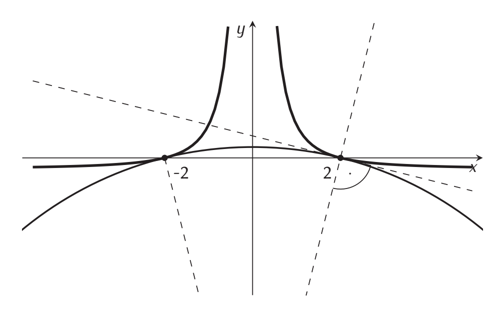
Die gesuchte Höhe ist also 235 Meter.

Lösung zu Aufgabe A 1.2

Zunächst werden die Nullstellen der Funktion h bestimmt.

$$h(x) = 0 \iff \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} = 0 \iff x^2 = 4 \iff x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Im folgenden Schaubild ist der Graph von h abgebildet.



Aufgrund der Achsensymmetrie des Graphen von h kann der Mittelpunkt des gesuchten Kreises nur auf der y-Achse liegen. Für die x-Koordinate des Mittelpunktes M gilt also $x_M = 0$. Weiterhin muss die Verbindungsstrecke von Mittelpunkt und Berührpunkt senkrecht zur Kreistangente, also der Tangente an den Graphen von h an der Stelle $x = 2$, stehen. Sie ist folglich ein Abschnitt der Normalen. Insofern genügt es, eine Gleichung der Normalen im Punkt P(2|0) aufzustellen und dann den y-Achsenabschnitt dieser Normalen zu bestimmen. Für die Gleichung der Normalen n gilt:

$$n(x) = ax + b \quad \text{mit} \quad a = -\frac{1}{h'(2)}.$$

Desweiteren gilt:

$$h'(x) = -2 \cdot x^{-3}$$

und damit

$$h'(2) = -2 \cdot (2)^{-3} = -\frac{1}{4}$$

Die Steigung der Nomalen ist also $a = 4$. Um den Wert des y-Achsenabschnitts b zu erhalten, wird eine Punktprobe mit dem Punkt P(2|0) durchgeführt:

$$n(2) = 4 \cdot 2 + b = 0 \implies b = -8$$

Die Gleichung der Normalen lautet somit

$$n(x) = 4x - 8.$$

Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind M(0|-8).

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe A 2.1

a) ➤ *Maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe*

Da die Funktion s die momentane Änderungsrate der Schneehöhe beschreibt, entspricht die maximale momentane Änderungsrate dem Maximum der Funktion s.

Es muss also das Maximum der Funktion s mithilfe eines GTR oder schriftlich berechnet werden: Es gelten:

$$s'(t) = -8 \cdot e^{-0,5t} + 14e^{-t},$$
$$s''(t) = 4 \cdot e^{-0,5t} - 14e^{-t}.$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung:

$$\begin{aligned} s'(t) = 0 \quad &\iff \quad -8 \cdot e^{-0,5t} + 14e^{-t} = 0 \\ &\iff \quad -8 \cdot e^{0,5t} + 14 = 0 \\ &\iff \quad -8 \cdot e^{0,5t} = -14 \\ &\iff \quad e^{0,5t} = \frac{14}{8} \\ &\iff \quad t_1 = 2\ln\left(\frac{7}{4}\right) \approx 1,12. \end{aligned}$$

Nun wird noch überprüft, ob an dieser Stelle t_1 tatsächlich ein Maximum vorliegt. Es gilt:

$$s''(1,12) = -\frac{16}{7} \approx -2,28 < 0.$$

Damit liegt an der Stelle t_1 ein Maximum der Funktion s vor, wobei:

$$s(t_1) \approx s\left(2\ln\left(\frac{7}{4}\right)\right) = \frac{18}{7} \approx 2,57.$$

Die Randwerte sind

$$s(0) = 0 \quad \text{und} \quad s(12) \approx -1,96.$$

Die maximale momentane Änderungsrate beträgt somit ungefähr 2,57 cm pro Stunde.

☞ *Alternative:* Bei dem Funktionsterm von s bietet sich eine Substitution $u = e^{-0,5t}$ an, sodass sich ergibt:

$$s(t) = 16u - 14u^2 - 2$$

Bringt man diese in die Scheitelpunktform erhält man

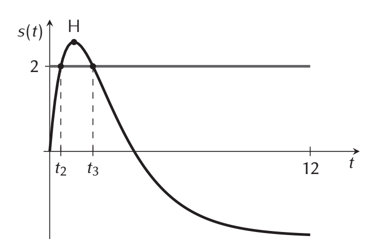
$$\begin{aligned} s(t) &= -14\left(u^2 - \frac{8}{7}u\right) - 2 \\ &= -14\left(\left(u - \frac{4}{7}\right)^2 - \frac{16}{49}\right) - 2 \\ &= -14\left(u - \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{14 \cdot 16}{49} - 2 \\ &= -14\left(u - \frac{4}{7}\right)^2 + \frac{18}{7}. \end{aligned}$$

Aus diesem Term lässt sich direkt ablesen, dass das Maximum von s gleich $\frac{18}{7}$ ist. Dieses wird für $u_1 = \frac{4}{7}$ angenommen. Also ist

$$e^{-0,5t_1} = \frac{4}{7} \quad \iff \quad t_1 = -2\ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx 1,12.$$

Damit liegt t_1 im Definitionsbereich von s, womit die maximale Änderungsrate der Schneehöhe tatsächlich $\frac{18}{7}$ Zentimeter pro Stunde ist.

➤ *Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer als* 2 cm *pro Stunde ist*



Zur Berechnung des Zeitraums, in dem die die momentane Änderungsrate größer als 2 cm pro Stunde ist, müssen die Schnittpunkte des Graphen der Funktion s mit der Geraden $y = 2$ mithilfe eines GTR bestimmt werden:

$$s(t) = 2 \quad \Longrightarrow \quad t_2 \approx 0,51 \quad \text{und} \quad t_3 \approx 1,99.$$

Da schon bekannt ist, dass an der Stelle $t_1 \approx 1,12$ ein Maximum von s vorliegt, das mit $\frac{18}{7}$ größer als 2 ist, sind die Funktionswerte von s zwischen t_2 und t_3 größer als 2.

Um nun endgültig den Zeitraum angeben zu können, ist noch zu beachten, dass um 10.00 Uhr mit der Messung begonnen wurde.

Somit ist die momentane Änderungsrate der Schneehöhe von ca. 10.30 Uhr bis ca. 12.00 Uhr größer als 2 cm pro Stunde.

☞ *Alternative:* Mit der Substitution $u = e^{-0,5t}$ lassen sich t_2 und t_3 auch ohne GTR bestimmen. Man erhält:

$$-14u^2 + 16u - 2 = 2 \quad \iff \quad -14u^2 + 16u - 4 = 0.$$

Lösungen

Die Mitternachtsformel liefert die Lösungen

$$u_2 = \frac{-16 - \sqrt{32}}{-28} = \frac{-16 - 4\sqrt{2}}{-28} = \frac{4 + \sqrt{2}}{7}$$

$$u_3 = \frac{-16 + \sqrt{32}}{-28} = \frac{4 - \sqrt{2}}{7}$$

Nach der Rücksubstitution ergibt sich

$$t_2 = -2\ln\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{7}\right) \approx 0{,}51 \quad t_3 = -2\ln\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{7}\right) \approx 1{,}99.$$

➤ *Schneehöhe um* 12.00 *Uhr*

Zunächst wird beachtet, dass die Schneehöhe zu Beginn der Messung bereits 150 cm beträgt. Außerdem muss auch hier bedacht werden, dass die Messung um 10.00 Uhr beginnt, sodass für 12.00 Uhr also $t = 2$ betrachtet werden muss.

Da s die momentane Änderungsrate der Schneehöhe beschreibt, gilt für die Schneehöhe H um 12.00 Uhr:

$$H = 150 + \int_0^2 s(t)\,\mathrm{d}t \approx 154{,}12.$$

Der Schnee liegt um 12.00 Uhr also ca. 154,12 cm hoch.

b) ➤ *Schneehöhe zum Zeitpunkt t*

Da die Funktion s die momentane Änderungsrate der Schneehöhe beschreibt, wird durch eine Stammfunktion S von s die Schneehöhe zur Zeit t beschrieben. Ganz allgemein gilt für eine beliebige Stammfunktion S von s:

$$S(t) = \int s(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int \left(16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{-0{,}5} \cdot 16e^{-0{,}5t} - \frac{1}{-1} \cdot 14e^{-t} - 2t + C$$

$$= -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + C.$$

Dieser Term ist zwar schon integralfrei, jedoch muss noch die Bedingung einfließen, dass zu Beginn der Beobachtung bereits 150 cm Schnee liegen. Damit kann dann auch der Parameter C ermittelt werden, sodass eine bestimmte Stammfunktion angegeben werden kann.

Es gilt also:

$$S(0) = 150 \iff -32e^{-0{,}5\cdot 0} + 14e^{-0} - 2\cdot 0 + C = 150$$

$$\iff -32 + 14 + C = 150$$

$$\iff C = 168.$$

Ein integralfreier Funktionsterm, der die Schneehöhe zur Zeit t beschreibt, ist:

$$S(t) = -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + 168.$$

➤ *Zeitpunkt, zu dem die Schneehöhe* 153 cm *beträgt*

Mit dem gerade bestimmten integralfreien Term lassen sich nun die Zeitpunkte im Intervall [0; 12] bestimmen, zu denen die Schneehöhe 153 cm beträgt:

$$S(t) = 153$$

$$\iff -32e^{-0{,}5t} + 14e^{-t} - 2t + 168 = 153$$

Aus dieser Gleichung kann man mithilfe eines GTR die Lösungen berechnen:

$$t_4 \approx 1{,}50 \quad \text{und} \quad t_5 \approx 7{,}03.$$

Somit beträgt die Schneehöhe sowohl um ca. 11.30 Uhr als auch um ca. 17.00 Uhr 153 cm.

c) ➤ *Verlängerung des Zeitraums durch Schneekanone*

Wenn sich die momentane Änderungsrate um 1 cm pro Stunde erhöht, dann gilt für die neue Funktion s^* der Änderungsrate:

$$s^*(t) = s(t) + 1 = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2 + 1$$

$$= 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 1.$$

(t in Stunden nach 10.00 Uhr, $s^*(t)$ in Zentimeter pro Stunde.)

Die Schneehöhe nimmt zu, wenn der Graph von s bzw. von s^* oberhalb der t-Achse liegt. Daher müssen nun von beiden Funktionen die Nullstellen bestimmt werden.

Für die Nullstellen von s gilt:

$$s(t) = 0 \implies t_6 = 0 \quad \text{und} \quad t_7 \approx 3{,}89.$$

Da schon aus Aufgabenteil a bekannt ist, dass die Funktion s an der Stelle $t_1 \approx 1{,}12$ ein Maximum besitzt, nimmt die Schneehöhe in diesem Fall in der Zeit von 10.00 Uhr bis ca. 14.00 Uhr zu.

Für die Nullstellen von s^* im Intervall [0; 12] gilt:

$$s^*(t) = 0 \implies t_8 \approx 5{,}43.$$

Daraus ergibt sich nun die durch die Schneekanonen verursachte Verlängerung des Zeitraums, in dem die Schneehöhe zunimmt.

$$5{,}43 - 3{,}89 = 1{,}54.$$

Durch den Einsatz von Schneekanonen verlängert sich der Zeitraum um ungefähr 1,54 Stunden.

☞ *Alternative:* Mit der Substitution $u = e^{-0{,}5t}$ ergeben sich die Nullstellen von s als

$$s(t) = -14u^2 + 16u - 2 = 0$$

$$\iff u^2 - \frac{8}{7} \cdot u + \frac{1}{7} = 0$$

$$\iff u_6 = 1 \quad \text{und} \quad u_7 = \frac{1}{7}$$

Lösungen

beziehungsweise

$$t_6 = -2\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad t_7 = -2\ln\left(\frac{1}{7}\right) = 2\ln(7)$$

und die Nullstellen von s^* als

$$s^*(t) = -14u^2 + 16u - 1 = 0$$

$$\iff \quad u^2 - \frac{8}{7}\cdot u + \frac{1}{14} = 0$$

$$\implies \quad u_8 = \frac{4}{7} - \sqrt{\frac{16}{49} - \frac{1}{14}} = \frac{4}{7} - \sqrt{\frac{25}{98}}$$

$$u_9 = \frac{4}{7} + \sqrt{\frac{16}{49} - \frac{1}{14}} = \frac{4}{7} + \sqrt{\frac{25}{98}}$$

beziehungsweise

$$t_8 = -2\ln\left(\frac{4}{7} - \sqrt{\frac{25}{98}}\right) \approx 5{,}43$$

$$t_8 = -2\ln\left(\frac{4}{7} + \sqrt{\frac{25}{98}}\right) \approx -0{,}15.$$

Im Intervall [0; 12] liegt nur die Nullstelle t_8. Die durch die Schneekanonen verursachte Verlängerung des Zeitraums in Stunden, in dem die Schneehöhe zunimmt, berechnet sich damit als

$$t_8 - t_7 = -2\ln\left(\frac{4}{7} - \sqrt{\frac{25}{98}}\right) - 2\ln 7 = -2\ln\left(4 - \sqrt{\frac{25}{2}}\right) \approx 1{,}53.$$

Die Abweichung der gerundeten Ergebnisses im Vergleich zu oben ergibt sich daraus, dass oben bereits Zwischenergebnisse gerundet wurden und sich damit die Rundungsfehler addieren.

➤ *Notwendige Zentimeter Schnee für eine Schneehöhe von* 160 cm *um* 18.00 *Uhr*

Mit Hilfe der Funktion S aus Aufgabenteil b), lässt sich zunächst die Schneehöhe um 18.00 Uhr berechnen:

$$S(8) \approx 151{,}42.$$

Da die Schneekanonen erst um 12.30 Uhr in Betrieb genommen werden, verbleiben 5,5 Stunden für den Einsatz der Schneekanonen. In dieser Zeit müssen die Schneekanonen eine Schneehöhe von

$$160\,\text{cm} - 151{,}42\,\text{cm} = 8{,}58\,\text{cm}$$

liefern.

Es ergibt sich also folgende Leistung der Schneekanonen:

$$\frac{8{,}58\,\text{cm}}{5{,}5\,\text{h}} = 1{,}56\,\frac{\text{cm}}{\text{h}}.$$

Die Schneekanonen müssen somit 1,56 cm Schnee pro Stunde liefern, damit um 18.00 Uhr eine Schneehöhe von 160 cm erreicht wird.

Lösung zu Aufgabe A 2.2

a) Für $a = 3$ gilt

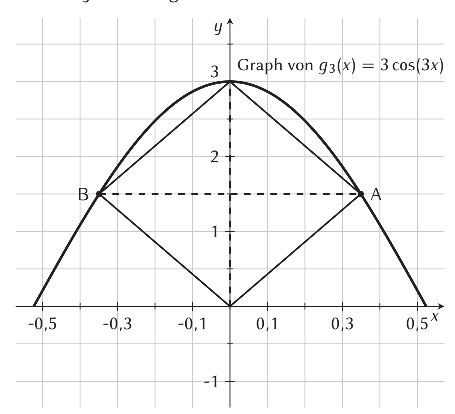
$$g_3(x) = 3\cdot\cos(3x).$$

Zunächst muss berechnet werden, in welchem Punkt der Graph von g_3 die y-Achse schneidet:

$$g_3(0) = 3.$$

Der Graph von g_3 schneidet die y-Achse im Punkt S(0|3).

Bei einer Raute schneiden sich die Diagonalen senkrecht in ihren Mittelpunkten. Da die eine Diagonale auf der y-Achse liegt und die Länge 3 besitzt, muss die andere Diagonale waagerecht auf der Höhe $y = 1{,}5$ liegen.



Daraus ergibt sich nun die folgende Bedingung, mit der die Punkte A und B der Raute bestimmt werden können:

$$g_3(x) = 3\cdot\cos(3x) = 1{,}5 \iff \cos(3x) = 0{,}5 \iff 3x = \frac{1}{3}\pi.$$

Es folgt somit für die x-Werte dieser beiden Punkte:

$$x_A = \frac{\pi}{9} \approx 0{,}35 \quad \text{und} \quad x_B = -\frac{\pi}{9} \approx -0{,}35.$$

Damit ergeben sich die folgenden Koordinaten der Eckpunkte als

A(0,35|1,5) und B(-0,35|1,5) .

Nun lassen sich die Längen der beiden Diagonalen bestimmen. Die Diagonale, die senkrecht auf der y-Achse verläuft, besitzt die Länge 3 LE. Die Diagonale, die waagerecht auf der Höhe 1,5 liegt, besitzt die Länge

$$2\cdot 0{,}35 = 0{,}7.$$

b) In einem Quadrat sind die Diagonalen gleich lang.

Da der Graph von g_a die y-Achse im Punkt $S_y(0|a)$ schneidet, beträgt die Länge der senkrechten Diagonalen auf der y-Achse a.

Lösungen

Die waagrechte Diagonale muss ebenfalls die Länge a besitzen, wenn die Raute ein Quadrat ist.

Der Punkt A, der sich bei der Raute auf halber Höhe $y = 0{,}5a$ befindet, muss also den x-Wert $0{,}5a$ besitzen. Es ergibt sich also die folgende Bedingung:

$$g_a(0{,}5a) = 0{,}5a \quad\Longrightarrow\quad a \cdot \cos(a \cdot 0{,}5a) = 0{,}5a \quad\Longrightarrow\quad \cos(0{,}5a^2) = 0{,}5.$$

Wegen

$$0 < x = 0{,}5 \cdot a < \frac{\pi}{2a}$$

nach Voraussetzung muss auch

$$0 < 0{,}5a^2 < \frac{\pi}{2}$$

gelten. Somit bleibt nur

$$0{,}5a^2 = \frac{\pi}{3} \quad\Longrightarrow\quad a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$$

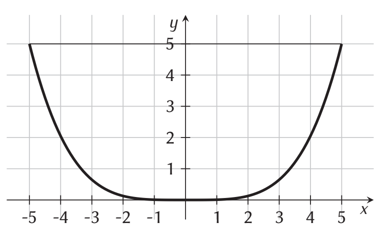
Für $a = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ ist die Raute ein Quadrat.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 1

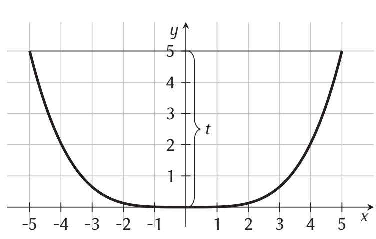
Lösung zu Aufgabe A 1

a) ➤ *Skizze*

Im folgenden Schaubild ist der Graph G_f der Funktion f skizziert.



➤ *Tiefe des Laderaums*



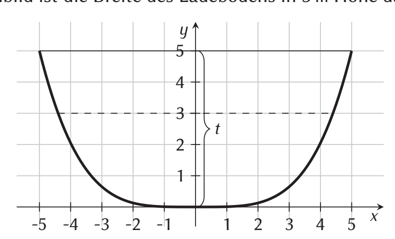
Der Graph der Funktion f ist für $x < 0$ monoton fallend und für $x > 0$ monoton wachsend. Die Tiefe des Laderaumes in der Mitte ergibt sich also als Differenz der Funktionswerte an den Rändern des Bereichs $[-5; 5]$ und am Nullpunkt. Es gilt:

$$t = f(5) - f(0) = f(-5) - f(0) = 5 - 0.$$

Somit ist der Laderaum in der Mitte 5 m tief.

➤ *Breite in 3 m Höhe*

Im folgenden Schaubild ist die Breite des Ladebodens in 3 m Höhe dargestellt.



Lösungen

Zunächst werden die Schnittpunkte des Graphen G_f mit der Gerade $y = 3$ bestimmt. Es gilt:

$$\frac{x^4}{125} = 3 \iff x^4 = 375$$
$$\iff x_1 = -\sqrt[4]{375} \quad \text{oder} \quad x_2 = \sqrt[4]{375}.$$

Die Breite d des Stollens in 3 m Höhe ist damit gegeben durch:

$$d = x_2 - x_1 = \sqrt[4]{375} - \left(-\sqrt[4]{375}\right) = 2 \cdot \sqrt[4]{375} \approx 8{,}80.$$

In 3 m Höhe ist der Laderaum ungefähr 8,80 m breit.

➤ *Bereich mit weniger als 5 % Neigung*

Die Neigung des Stollens wird durch den Wert der Steigung des Graphen an dieser Stelle bestimmt. Gesucht sind also diejenigen Stellen, an denen die Tangente an den Graphen von f kleiner als 5 % ist. Zunächst wird die Ableitung f' der Funktion f bestimmt. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{4}{125}x^3.$$

Gesucht sind damit die Lösungen der Gleichung:

$$\frac{4}{125}x^3 = 0{,}05$$
$$\iff x^3 = \frac{25}{16}$$
$$\iff x = \sqrt[3]{\frac{25}{16}}$$
$$\iff x \approx 1{,}16.$$

Der Ladeboden hat an der Stelle $x \approx 1{,}16$ eine Neigung von 5 %. Aus der Zeichnung kann abgelesen werden, dass der Ladeboden für $x > 1{,}16$ eine größere Steigung besitzt. Desweiteren ist der Ladeboden symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:

$$f(-x) = \frac{1}{125}(-x)^4 = \frac{1}{125}x^4 = f(x).$$

Der Bereich, in dem die Neigung kleiner als 5 % ist, befindet sich also 1,16 m zu beiden Seiten der Mitte.

➤ *Volumen des Laderaumes*

Das Volumen V des Laderaumes in Kubikmetern ergibt sich aus dem Produkt der Querschnittsfläche und der Länge von 50 m. Die Querschnittsfläche A ist die Fläche, die vom Graphen von f und der Geraden $y = 5$ eingeschlossen wird, da sich die Oberkante des Laderaumes auf 5 m Höhe befindet. Es gilt also:

$$A = \int_{-5}^{5} \left(5 - \frac{x^4}{125}\right) dx = \left[5x - \frac{x^5}{625}\right]_{-5}^{5} = 25 - 5 - (-25 + 5) = 40$$

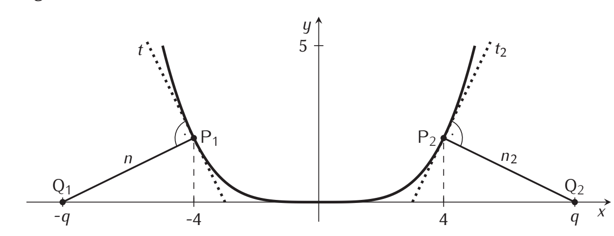
Für das Volumen des Laderaumes gilt:

$$\implies V = 40 \cdot 50 = 2000.$$

Das Volumen des Laderaumes beträgt somit 2000 m³.

b) ➤ *Abstand der Stützen*

In der folgenden Skizze wird der Sachverhalt verdeutlicht.



Gesucht sind die Punkte $Q_1(-q|0)$ und $Q_2(q|0)$, die auf den Normalen an den Graphen von f an den Punkten $P_1(-4|f(-4))$ und $P_2(4|f(4))$ liegen. Zunächst werden die vollständigen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 bestimmt. Es gelten:

$$f(-4) = \frac{1}{125} \cdot (-4)^4 = \frac{256}{125},$$
$$f(4) = \frac{1}{125} \cdot 4^4 = \frac{256}{125}.$$

Die Punkte P_1 und Q_1 liegen auf der Normalen an den Graphen von f im Punkt P_1 und die Punkte P_2 und Q_2 liegen auf der Normalen an den Graphen von f im Punkt P_2. Die Steigung m_n der Normalen an den Graphen von f kann wie folgt aus der Steigung der Tangente m_t an den Graphen von f bestimmen:

$$m_n = -\frac{1}{m_t}.$$

Die Steigung der Tangente m_t entspricht dem Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -4$:

$$m_t = f'(-4) = \frac{4}{125} \cdot (-4)^3 = -\frac{256}{125},$$

und damit:

$$m_n = -\frac{1}{-\frac{256}{125}} = \frac{125}{256}.$$

Die Steigung m der Geraden durch P_1 und Q_1 kann außerdem mithilfe des Steigungsdreiecks zwischen diesen beiden Punkten bestimmt werden:

$$m = \frac{f(-4) - 0}{-4 - (-q)} = \frac{\frac{256}{125} - 0}{-4 + q} = \frac{256}{-500 + 125q}.$$

Die beiden Punkte P_1 und Q_1 liegen auf der Normalen, somit muss die Steigung m mit der Steigung m_n übereinstimmen:

$$m = m_n \iff \frac{256}{-500 + 125q} = \frac{125}{256}$$
$$\iff 256 = \frac{125}{256} \cdot (-500 + 125q)$$
$$\iff 65536 = -62500 + 15625q$$
$$\iff 128036 = 15625q$$
$$\iff q \approx 8{,}194$$

Lösungen

Der Abstand der Enden der Stützen ist dann das Doppelte von diesem Wert:

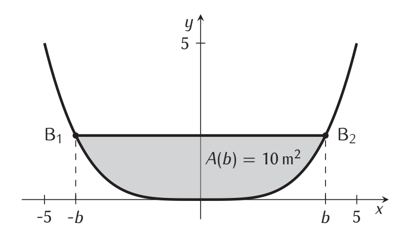
$$2q \approx 2 \cdot 8{,}194 = 16{,}39.$$

Die Stützen enden somit in einem Abstand von etwa 16,39 m auf der Plattform.

c) Das Volumen des unteren Raumes kann als das Produkt von dessen Querschnittsfläche mit dessen Länge 50 m berechnet werden. Die Querschnittsfläche des unteren Raumes muss also 10 m² betragen.

➤ *Skizze*

In der folgenden Skizze wird der Sachverhalt veranschaulicht.



Da der Laderaum symmetrisch ist, befindet sich die Zwischendecke im Querschnitt zwischen zwei Punkten der Form $B_1(-b|f(-b))$ und $B_2(b|f(b))$.

➤ *Querschnittsfläche des unteren Raumes*

Die Fläche $A(b)$ entspricht der von den Graphen von $y = f(b)$ und von f eingeschlossenen Fläche. Es gilt:

$$\begin{aligned} A(b) &= \int_{-b}^{b} \left(f(b) - f(x)\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-b}^{b} \left(\frac{b^4}{125} - \frac{x^4}{125}\right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{b^4}{125} \cdot x - \frac{x^5}{625}\right]_{-b}^{b} \\ &= \frac{b^5}{125} - \frac{b^5}{625} - \frac{(-b)^5}{125} + \frac{(-b)^5}{125} \\ &= \frac{8b^5}{625}. \end{aligned}$$

➤ *Wert für b*

Der Flächeninhalt dieser Fläche muss 10 m² betragen. Es muss also gelten:

$$A(b) = 10 \iff \frac{8b^5}{625} = 10 \iff b = \sqrt[5]{\frac{3125}{4}}.$$

➤ *Breite des Zwischendecks*

Der Abstand der Punkte B_1 und B_2 ist nun das Doppelte dieses Wertes:

$$2b = 2 \cdot \sqrt[5]{\frac{3125}{4}} \approx 7{,}58.$$

Die Breite der Zwischendecke beträgt also ungefähr 7,58 m.

d) Die Querschnittsfläche des Zylinders ist ein Kreis mit Radius 4,9 m. Wenn der Zylinder so in den Lagerraum passt, dass er an der tiefsten Stelle aufliegt, dann befindet sich der Mittelpunkt dieses Kreises bei $M(0|4{,}9)$.

Der Zylinder passt genau dann in den Laderaum, wenn dann kein Punkt des Graphen von f näher an M liegt als 4,9. Der Abstand $d(x)$ eines Punktes $P(x|f(x))$ zum Punkt M ist gegeben durch:

$$(d(x))^2 = (0 - x)^2 + \left(4{,}9 - \frac{x^4}{125}\right)^2 = \frac{x^8}{15\,625} - \frac{49x^4}{625} + x^2 + 4{,}9^2.$$

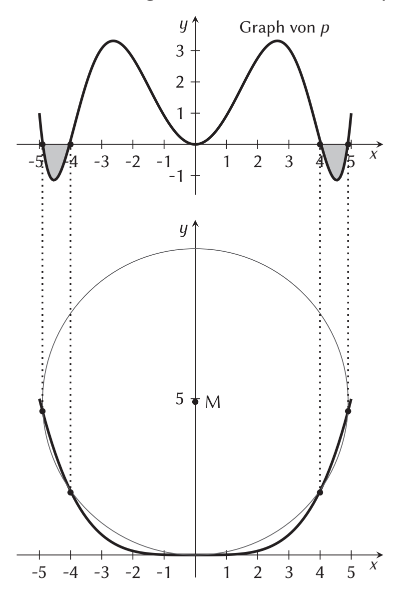
Der Zylinder passt also nicht in den Laderaum, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(d(x))^2 < 4{,}9^2$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn der Graph von p, definiert durch

$$p(x) = (d(x))^2 - 4{,}9^2 = \frac{x^8}{15\,625} - \frac{49x^4}{625} + x^2,$$

unterhalb der x-Achse verläuft. Im folgenden Schaubild ist der Graph von p dargestellt.



Lösungen

Die Nullstellen von p werden bestimmt und sie liegen bei:

$$x_1 \approx -4{,}89, \quad x_2 \approx -4{,}03, \quad x_3 \approx 4{,}03 \quad \text{und} \quad x_4 \approx 4{,}89.$$

Für alle $x \in [x_1; x_2]$ und $x \in [x_3; x_4]$ verläuft der Graph von p unterhalb der x-Achse und damit ist der Abstand des Graphen von f zum Punkt M in diesem Bereich kleiner als 4,9. Der Zylinder passt also nicht so in den Laderaum, dass er an der tiefsten Stelle des Laderaums aufliegen kann.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe A 2.1

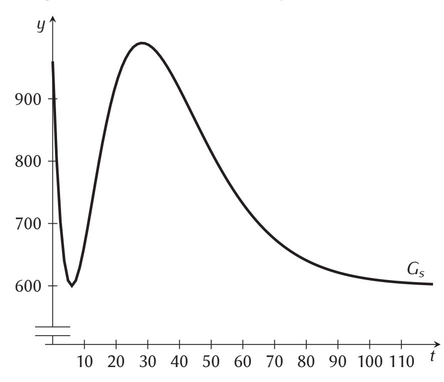
a) ➤ *Geringste Sterberate*

Der nichtkonstante Summand von s ist gegeben durch

$$10(t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t},$$

und als Produkt eines quadratischen Termes mit der Exponentialfunktion nichtnegativ. Damit kann die geringste Sterberate nicht kleiner als 600 sein und dieser Wert wird für $t = 6$ auch angenommen. Die geringste Sterberate liegt somit bei 600 Individuen pro Jahr.

☞ *Alternative:* Im folgenden Schaubild ist der Graph der Funktion s dargestellt.



Gesucht ist der Tiefpunkt des Graphen von s. Zunächst wird die Ableitung der Funktion s bestimmt:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 20(t-6) \cdot e^{-0{,}09t} + 10(t-6)^2 \cdot (-0{,}09) \cdot e^{-0{,}09t} \\ &= e^{-0{,}09t} \cdot \left(20t - 120 - 0{,}9 \cdot (t^2 - 12t + 36)\right) \\ &= e^{-0{,}09t} \cdot \left(-0{,}9t^2 + 30{,}8t - 152{,}4\right). \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Ableitung s' können mithilfe des Satzes vom Nullprodukt bestimmt werden. Die Exponentialfunktion hat keine Nullstellen und somit sind die Nullstellen von s' gegeben durch die Lösungen der Gleichung:

$$-0{,}9t^2 + 30{,}8t - 154{,}4 = 0.$$

Diese können mihilfe der Mitternachtsformel bestimmt werden und es gilt:

$$t_{1,2} - \frac{-30{,}8 \pm \sqrt{(30{,}8)^2 - 4 \cdot (-0{,}9) \cdot (-152{,}4)}}{2 \cdot (-0{,}9)} = \frac{-30{,}8 \pm \sqrt{400}}{-1{,}8} = \frac{-30{,}8 \pm 20}{-1{,}8}.$$

und damit:

$$t_1 = 6 \quad \text{und} \quad t_2 = \frac{254}{9}.$$

Aus dem Schaubild kann abgelesen werden, dass der Graph von s an der Stelle $t_1 = 6$ einen Tiefpunkt und an der Stelle $t_2 = \frac{254}{9}$ einen Hochpunkt besitzt. Es gilt:

$$s(6) = 600 + 10(6 - 6)^2 \cdot e^{-0{,}09t} = 600.$$

Die geringste Sterberate liegt somit bei 600 Individuen pro Jahr.

➤ *Größte Differenz aus Geburten- und Sterberate*

Die Differenz aus Geburten- und Sterberate ist gegeben durch die Funktion d mit:

$$\begin{aligned} d(t) &= g(t) - s(t) \\ &= -200 + 20(t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 10(t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}. \end{aligned}$$

Gesucht ist der Hochpunkt des Graphen der Funktion d. Zunächst wird die Ableitung der Funktion d bestimmt:

$$\begin{aligned} d'(t) &= 40(t+1)e^{-0{,}1t} - 2(t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 20(t-6) \cdot e^{-0{,}09t} - 0{,}9(t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t} \\ &= \left(-2t^2 + 36t + 38\right) \cdot e^{-0{,}1t} + \left(0{,}9t^2 - 30{,}8t + 152{,}4\right) \cdot e^{-0{,}09t}. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Gleichung

$$d'(t) = 0 \iff \left(-2t^2 + 36t + 38\right) \cdot e^{-0{,}1t} + \left(0{,}9t^2 - 30{,}8t + 152{,}4\right) \cdot e^{-0{,}09t} = 0.$$

Mithilfe eines GTR können die Lösungen dieser Gleichung bestimmt werden und es gilt:

$$t_1 \approx 15{,}12 \quad \text{und} \quad t_2 \approx 99{,}29.$$

Setzt man diese Nullstellen sowie die Ränder des Definitionsbereiches in die Funktion d ein, so ist die maximale Differenz aus Geburten- und Sterberate der größte Wert, den man erhält. Die Entwicklung der Population wird für die Jahre 1960 bis 2020 beschrieben durch die Funktionen g und s beziehungsweise d. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}$ dieser Funktionen ist damit gegeben durch $\mathcal{D} = [0; 60]$. Es gelten:

$$d(0) = -540, \quad d(t_1) \approx 732{,}49 \quad \text{und} \quad d(60) \approx -147{,}23.$$

Die Differenz aus Geburtenrate und Sterberate war also zum Zeitpunkt $t_1 \approx 15{,}12$ am größten, was dem Jahr 1975 entspricht.

➤ *Zeitraum, in dem die Population zugenommen hat*

Die Population nimmt genau zu, wenn die Differenz d aus Geburten- und Sterbrate positiv ist. Hierzu werden zunächst die Nullstellen von d bestimmt, also die Lösungen der Gleichung

$$d(t) = 0 \iff -200 + 20(t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 10(t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t} = 0.$$

Diese werden mithilfe eines GTR bestimmt:

$$t_3 = 14{,}66, \quad t_4 = 3{,}22 \quad \text{und} \quad t_5 = 45{,}32.$$

Der Wert t_3 liegt außerhalb des Definitionsbereiches $\mathcal{D} = [0; 60]$. Außerdem ist bereits bekannt, dass das Maximum bei t_1 zwischen t_4 und t_5 liegt und die Funktion dort positiv ist. Außerdem sind die Werte $d(0)$ und $d(60)$ negativ, sodass bei t_4 und t_5 tatsächlich Vorzeichenwechsel stattfinden. Die Funktion d ist positiv im Bereich zwischen t_4 und t_5, also im Intervall $[3{,}22; 45{,}32]$. Somit hat die Population im Zeitraum von 1963 bis 2005 zugenommen.

b) Zu Beginn des Jahres 1960 bestand die Population aus 20 000 Individuen. Damit kann der Bestand $B(x)$ der Population x Jahre später beschrieben werden durch den Term:

$$B(x) = 20000 + \int_0^x d(t)\,dt.$$

Der Bestand der Population im Jahr 2017 ist damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} B(57) &= 20000 + \int_0^{57} d(t)\,dt \\ &= 20000 + \int_0^{57} \left(200 + 20(t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 10(t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}\right) dt. \end{aligned}$$

Mithilfe eines GTR kann der Wert des Integrals bestimmt werden und es gilt:

$$\begin{aligned} B(57) &= 20000 + \int_0^{57} d(t)\,dt \\ &\approx 20000 + 15635{,}96 \\ &\approx 35636. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Individuen war Anfang 2017 also etwa 35636.

➤ *Erster Zeitpunkt, bei dem die Population wieder auf dem Niveau von 1960 war*

Gesucht ist das kleinste $x > 0$, für das gilt:

$$\int_0^x \left(200 + 20(t+1)^2 \cdot e^{-0{,}1t} - 10(t-6)^2 \cdot e^{-0{,}09t}\right) dt = 20000.$$

Diese liefert der GTR:

$$t \approx 6{,}88.$$

Die Population war also im November 1968 erstmals wieder gleich groß wie 1960.

c) ➤ *Funktionsterm*

Gesucht ist eine Funktion f, welche die Körpergröße eines Individuums beschreibt. Ein Ansatz für die Funktion f ist gegeben durch:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt} + c, \quad a > 0, \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

Hierbei beschreibt $f(t)$ die Körpergröße des Individuums in Metern t Jahre nach Beobachtungsbeginn. Für die Ableitung f' gilt:

$$f'(t) = a \cdot (-b) \cdot e^{-bt} = -a \cdot b \cdot e^{-bt}.$$

Zu Beobachtungsbeginn ist das Individuum 0,5 m groß, es gilt also:

$$f(0) = 0{,}5 \iff a \cdot e^{-b \cdot 0} + c = 0{,}5 \iff a + c = 0{,}5.$$

Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit des Individuums zum Beobachtungsbeginn beträgt 0,15 m pro Jahr, also:

$$f'(0) = 0{,}15 \iff -a \cdot b \cdot e^{-b \cdot 0} = 0{,}15 \iff -a \cdot b = 0{,}15.$$

Im ausgewachsenen Zustand ist das Individuum 0,8 m groß, es gilt daher:

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0{,}8 \iff \lim_{t\to+\infty} a\cdot \mathrm{e}^{-bt} + c = 0{,}8$$
$$\iff c = 0{,}8.$$

Es gilt also $c = 0{,}8$ und damit wegen

$$f(0) = 0{,}5 \iff a + c = 0{,}5$$
$$\iff a = 0{,}5 - c$$
$$\iff a = 0{,}5 - 0{,}8$$
$$\iff a = -0{,}3.$$

Nun werden die berechneten Werte in die letzte verbleibende Gleichung eingesetzt:

$$f'(0) = 0{,}15 \iff -a\cdot b = 0{,}15$$
$$\iff b = \frac{0{,}15}{0{,}3}$$
$$\iff b = 0{,}5.$$

Eine Funktionsgleichung für die Körpergröße des Individuums in Metern abhängig von der Zeit seit Beobachtungsbeginn in Jahren ist also

$$f(t) = 0{,}8 - 0{,}3\mathrm{e}^{-0{,}5t}.$$

☞ *Alternative:* Die Körpergröße eines Individuums entwickelt sich nach dem Gesetz des beschänkten Wachstums. Ein Ansatz für eine Funktion f, welche die Körpergröße beschreibt, ist gegeben durch

$$f(t) = S - (S - f(0))\mathrm{e}^{-kt},$$

wobei S die der Größe des Individuums im ausgewachsenen Zustand und $f(0)$ die Größe zu Beobachtungsbeginn beschreibt. Es gilt also:

$$f(t) = 0{,}8 - (0{,}8 - 0{,}5)\,\mathrm{e}^{-kt}$$
$$= 0{,}8 - 0{,}3\mathrm{e}^{-kt}$$

Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit zu Beobachtungsbeginn beträgt 0,5 m pro Jahr. Es muss gelten:

$$f'(0) = 0{,}15.$$

Mit

$$f'(t) = 0{,}3\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-kt}$$

gilt

$$f'(0) = 0{,}5 \iff 0{,}3\cdot k\cdot \mathrm{e}^{-k\cdot 0} = 0{,}15 \iff 0{,}3k = 0{,}15 \iff k = 0{,}5.$$

Die Funktion f mit

$$f(t) = 0{,}8 - 0{,}3\mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

beschreibt die Größe des Individuums. Hierbei beschreibt $f(t)$ die Größe in Metern t Jahre nach Beobachtungsbeginn.

➤ *Dauer, bis das Individuum um 50 % gewachsen ist*

Zu Beobachtungsbeginn ist das Individuum 0,5 m groß. Seine Größe hat um 50 % zugenommen, wenn es 0,75 m groß ist. Gesucht ist die Lösung der folgenden Gleichung:

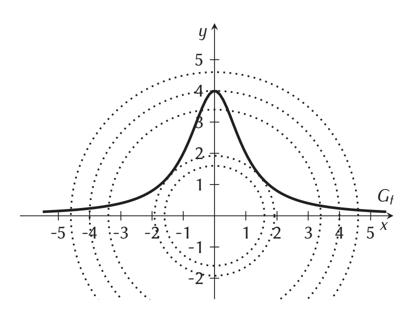
$$f(t) = 0{,}75 \iff 0{,}8 - 0{,}3\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 0{,}75$$
$$\iff \mathrm{e}^{-0{,}5t} = \frac{5}{30}$$
$$\iff t = -2\ln\left(\frac{5}{30}\right) \approx 3{,}58$$

Das Individuum ist also 3,58 Jahre nach Beobachtungsbeginn um 50 % gewachsen.

Lösung zu Aufgabe A 2.2

➤ *Skizze*

Zunächst wird eine Skizze angefertigt.



➤ *Charakterisierung der Schnittpunkte*

Der Kreis um O(0|0) mit Radius r schneidet den Graphen G_f von f genau in den Punkten, deren Abstand zum Ursprung genau r beträgt. Die Anzahl der Schnittpunkte ist also die Anzahl der Lösungen der folgenden Gleichung:

$$\sqrt{(f(x))^2 + x^2} = r \iff f(x)^2 + x^2 = r^2.$$

Die Funktion g wird wie folgt definiert

$$g(x) = f(x)^2 + x^2 = \frac{16}{(x^2+1)^2} + x^2.$$

Gesucht ist die Anzahl derjenigen Stellen, an denen $g(x) = r$ gilt. Es gilt: Ist eine stetige Funktion auf einem Abschnitt monoton, so nimmt sie dort jeden Wert zwischen dem Minimum und dem Maximum auf diesem Abschnitt genau einmal an. Die Aufgabe lässt sich also lösen, wenn man die x-Achse in Intervalle einteilt, auf denen g monoton ist.

Die Nullstellen von g' teilen die x-Achse in genau solche Abschnitte, da die Ableitung nur dort ihr Vorzeichen wechselt. Es wird nun also zunächst g mithilfe mehrfacher Anwendung der Kettenregel abgeleitet. Es gilt:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-64x}{(x^2+1)^3} + 2x \\ &= \frac{-64x}{(x^2+1)^3} + \frac{2x \cdot (x^2+1)^3}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{-64x + 2c \cdot (x^2+1)^3}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{2x \cdot ((x^2+1)^3 - 32)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

➤ *Nullstellen von g'*

Da $x^2 + 1$ immer positiv ist, sind die Nullstellen von g' genau die Nullstellen des Zählers. Im Zähler steht ein Produkt. Dieses ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Also:

$$2x = 0 \iff x_1 = 0$$

oder

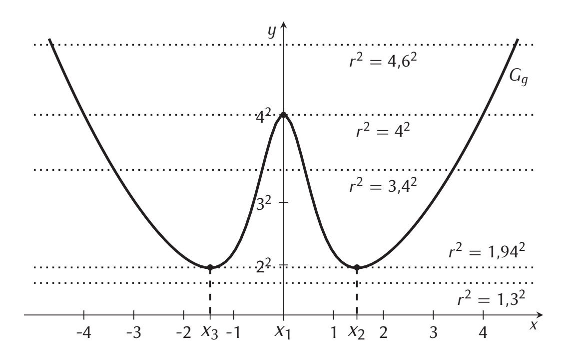
$$(x^2+1)^3 - 32 = 0 \iff x^2 = \sqrt[3]{32} - 1 \implies x_{2/3} = \pm\sqrt{\sqrt[3]{32} - 1}.$$

➤ *Analyse der Funktion in den Intervallen zwischen den Nullstellen von g'*

Die Funktionswerte von g an diesen Stellen sind:

$$g(x_1) = g(0) = 16 \qquad g(x_2) = g(x_3) = \frac{16}{\sqrt[3]{32}^2} + \sqrt[3]{32} - 1 \approx 3{,}76$$

Der Verlauf des Graphen G_g von g ist im folgenden Schaubild skizziert.



Folglich können folgende Fälle unterschieden werden:

- ➤ $r < \sqrt{g(x_2)} \approx 1{,}94$: Die Funktionswerte von g sind überall größer als r^2, und damit gibt es keine Schnittpunkte des Kreises mit dem Graphen von f.

- ➤ $r = \sqrt{g(x_2)} \approx 1{,}94$: Die Funktion g nimmt an den Stellen $x = x_2$ und $x = x_3$ den Wert r^2 an. Der Kreis hat also zwei gemeinsame Punkte mit dem Graphen von f.
- ➤ $\sqrt{g(x_2)} < r < 4$: Die Funktion g nimmt den Wert r^2 jeweils einmal zwischen x_1 und x_2 und einmal zwischen x_3 und x_1 an, sowie für genau einen weiteren Wert von x der kleiner als x_3 und einen der größer als x_2 ist. Also schneidet der Kreis den Graphen von f in genau vier Punkten.
- ➤ $r = 4$: Die Funktion g nimmt den Wert $r^2 = 16$ für $x = x_1$ an, sowie weiterhin für genau einen weiteren Wert von x der kleiner als x_3 und einen der größer als x_2 ist. Also hat der Kreis mit dem Graphen von von f genau drei gemeinsame Punkte.
- ➤ $r > 4$: Die Funktion g nimmt den Wert r^2 nur noch für ein x an, das größer als x_2 ist, sowie eines, das kleiner als x_3 ist. Somit hat der Kreis genau zwei Punkte mit dem Graphen von f gemeinsam.

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe A 1.1

a) Zunächst werden die ersten drei Ableitungen der Funktion f bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10 \cdot e^{-0,5x} + 10x \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= 10 \cdot e^{-0,5x} - 5x \cdot e^{-0,5x} \\ &= (10 - 5x) \cdot e^{-0,5x} \\ f''(x) &= -5 \cdot e^{-0,5x} + (10 - 5x) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= -5 \cdot e^{-0,5x} + \left(-5 + \frac{5}{2}x\right) \cdot e^{-0,5x} \\ &= \left(-10 + \frac{5}{2}x\right) \cdot e^{-0,5x}, \\ f'''(x) &= \frac{5}{2} \cdot e^{-0,5x} + \left(-10 + \frac{5}{2}x\right) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot e^{-0,5x} + \left(5 - \frac{5}{4}x\right) \cdot e^{-0,5x} \\ &= \left(\frac{15}{2} - \frac{5}{4}x\right) \cdot e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

➤ *Koordinaten des Extrempunkts*

Kandidaten für die Extremstellen sind die Nullstellen der ersten Ableitung. Um diese zu bestimmen wird der Satz vom Nullprodukt ausgenutzt:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (10 - 5x) \cdot e^{-0,5x} = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & 10 - 5x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{-0,5x} = 0 \text{ (keine Lösung)} \\ \Longleftrightarrow\quad & 10 = 5x \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 2. \end{aligned}$$

Damit ist eine mögliche Extremstelle $x = 2$. Um herauszufinden, ob sich an der Stelle $x = 2$ ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt befindet, wird die zweite Ableitung benutzt:

$$\begin{aligned} f''(2) &= \left(-10 + \frac{5}{2} \cdot 2\right) \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \\ &= (-10 + 5) \cdot e^{-1} \\ &= -5 \cdot e^{-1} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion immer positiv ist, muss der Term wegen des Faktors -5 negativ sein. Also liegt bei $x = 2$ ein Hochpunkt vor.

Zur Bestimmung der y-Koordinate des Hochpunktes wird $x = 2$ in den Funktionsterm $f(x)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} f(2) &= 10 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \\ &= 20 \cdot e^{-1} \\ &= \frac{20}{e} \\ &\approx 7,36. \end{aligned}$$

Der Graph von f besitzt einen Hochpunkt bei ungefähr H(2|7,36).

☞ *Alternative:* Anstelle die zweite Ableitung zu benutzen, um die Art des Extremumpunkts zu bestimmen, kann auch die erste Ableitung an der Stelle $x = 2$ auf Vorzeichenwechsel überprüft werden. Da an der Stelle $x = 2$ das Vorzeichen des Faktors $(10 - 5x)$ von + zu - wechselt und der Faktor $e^{-0,5x}$ positiv ist, wechselt das Vorzeichen der ersten Ableitung an der Stelle $x = 2$ von + zu -. Es handelt sich somit um einen Hochpunkt.

➤ *Koordinaten des Wendepunkts*

Zunächst wird die Nullstelle der zweiten Ableitung bestimmt. Mithilfe der dritten Ableitung wird anschließend überprüft, ob es sich tatsächlich um einen Wendepunkt handelt.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-10 + \frac{5}{2}x\right) \cdot e^{-0,5x} \\ f'''(x) &= \frac{5}{2} \cdot e^{-0,5x} + \left(-10 + \frac{5}{2}x\right) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= \frac{5}{2} \cdot e^{-0,5x} + \left(5 - \frac{5}{4}x\right) \cdot e^{-0,5x} \\ &= \left(\frac{15}{2} - \frac{5}{4}x\right) \cdot e^{-0,5x}. \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung hat nach dem Satz vom Nullprodukt den Wert Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist, also wenn

$$\begin{aligned} & -10 + \frac{5}{2}x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{-0,5x} = 0 \text{ (keine Lösung)}. \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{5}{2}x = 10 \\ \Longleftrightarrow\quad & x = 4. \end{aligned}$$

Mithilfe der dritten Ableitung wird überprüft, ob an dieser Stelle tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt:

$$\begin{aligned} f'''(4) &= \left(\frac{15}{2} - \frac{5}{4} \cdot 4\right) \cdot e^{-0,5 \cdot 4} \\ &= \frac{5}{2}e^{-2} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Da die dritte Ableitung von Null verschieden ist, befindet sich an der Stelle $x = 4$ ein Wendepunkt.

Die y-Koordinate des Wendepunktes ist der Funktionswert von f an der Stelle $x = 4$:

$$\begin{aligned} f(4) &= 10 \cdot 4 \cdot e^{-0,5 \cdot 4} \\ &= 40 \cdot e^{-2} \\ &\approx 5{,}41. \end{aligned}$$

Der Wendepunkt besitzt ungefähr die Koordinaten W(4|5,41).

➤ *Gleichung der Asymptote*

Zur Bestimmung der Gleichung der Asymptoten wird das Verhalten im Unendlichen betrachtet. Die Exponentialfunktion wächst schneller für $x \to +\infty$ als jede lineare Funktion. Für $x \to -\infty$ geht die Exponentialfunktion schneller gegen Null als das Wachstum jeder Potenzfunktion.

Es gelten:

$$\lim_{x\to+\infty} 10x \cdot e^{-0,5x} = 0, \quad \text{da} \quad \lim_{x\to+\infty} 10x = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} e^{-0,5x} = 0$$

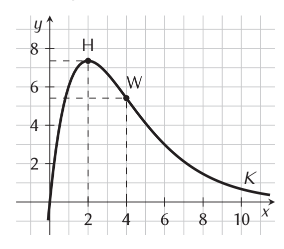
und

$$\lim_{x\to-\infty} 10x \cdot e^{-0,5x} = -\infty, \quad \text{da} \quad \lim_{x\to-\infty} 10x = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{-0,5x} = +\infty.$$

Somit ist die x-Achse eine waagrechte Asymptote des Graphen von f.

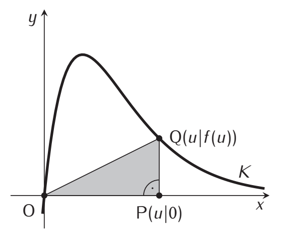
➤ *Skizze*

Im folgenden Schaubild ist der Graph K der Funktion f skizziert.



b) ➤ *Bestimmung des Wertes von u, damit das Dreieck OPQ Flächeninhalt 8 hat*

Zuallererst ist es sinnvoll, eine Skizze des Sachverhalts anzufertigen. Dafür kann man den Verlauf des Graphen der Funktion f aus der vorherigen Aufgabenstellung verwenden und dort die gegebenen Punkte O, P und Q einzeichnen.



Man erkennt, dass die Punkte ein rechtwinkliges Dreieck bilden, wobei Q auf dem Graphen der Funktion f liegt. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes kann mithilfe der Formel

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

bestimmt werden, wobei a und b die Längen der Katheten des rechtwinkligen Dreieck sind. In diesem Fall hat die Kathete a die Länge u und b entspricht der y-Koordinate von Q, also $f(u)$. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) \\ &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u \cdot e^{-0,5u}. \end{aligned}$$

Dieser Flächeninhalt soll den Wert 8 annehmen. Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u e^{-0,5u} &= 8 \\ 5u^2 \cdot e^{-0,5u} &= 8. \end{aligned}$$

Mithilfe eines GTR und der Voraussetzung, dass $u > 0$ sein soll, ergibt sich als eine mögliche Lösung $u_1 \approx 2{,}18$. Eine weitere mögliche Lösung ist $u_2 \approx 6{,}62$.

➤ *Wert von u, für den das Dreieck OPQ gleichschenklig ist*

Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn es zwei gleich lange Seiten hat. Da das Dreieck rechtwinklig ist, müssen es die beiden Katheten sein. Diese haben die Längen u und $f(u)$. Gesucht sind die Lösungen der Gleichung:

$$u = f(u).$$

Mithilfe eines GTR erhält man die Lösungen

$$u = 0 \quad \text{und} \quad u \approx 4{,}6052.$$

Die Lösung $u = 0$ ist nicht zulässig, da in der Aufgabenstellung $u > 0$ gefordert ist. Somit ist der Wert von u, für den das Dreieck gleichschenklig ist $u \approx 4{,}6052$.

☞ *Alternative:* Diese Gleichung lässt sich auch ohne GTR lösen:

$$\begin{aligned} f(u) = u \quad &\Longleftrightarrow \quad 10u \cdot e^{-0,5u} = u \\ &\Longleftrightarrow \quad 10u \cdot e^{-0,5u} - u = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u \cdot \left(10e^{-0,5u} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Wegen $u > 0$ muss gelten:

$$\begin{aligned} 10e^{-0,5u} - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-0,5u} = \frac{1}{10} \\ &\Longleftrightarrow \quad -0{,}5u = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad u = -2 \cdot \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad u \approx 4{,}6052. \end{aligned}$$

Das Dreieck PQR wird also für $u \approx 4{,}6052$ gleichschenklig.

Lösungen

c) Alle Intervalle der Länge 3 lassen sich allgemein darstellen durch

$[a; a+3]$.

Der Mittelwert einer Funktion in einem Intervall $[a; b]$ lässt sich bestimmen durch Berechnung von

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für obiges Intervall der Länge 3 sieht das Mittelwertintegral also wie folgt aus:

$$\frac{1}{3}\int_a^{a+3} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral soll den Wert 2,2 annehmen. Das heißt, es ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\frac{1}{3}\int_a^{a+3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2{,}2.$$

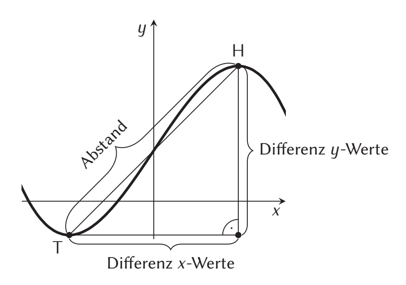
Der GTR liefert unter anderem die Lösung $a_1 \approx 5{,}5$. Damit ist $[5{,}5; 8{,}5]$ eines dieser gesuchten Intervalle.

Eine weitere Lösung ist $a_2 \approx -0{,}862$ mit dem Intervall $[-0{,}862; 2{,}138]$

Lösung zu Aufgabe A 1.2

➤ *Skizze*

Der Abstand zwischen zwei Punkten kann mithilfe des Satzes von Pythagoras bestimmt werden. Zur Veranschaulichung wird zunächst eine Skizze des Sachverhalts angefertigt.



➤ *Ableitungen*

Zunächst werden die ersten beiden Ableitungen der Funktion f_t bestimmt, der Parameter t wird hierbei wie eine Konstante behandelt:

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^2 - t^2\cdot 1 \\ &= x^2 - t^2 \\ f_t''(x) &= 2x. \end{aligned}$$

➤ *Koordinaten der Extrempunkte*

Mögliche Extrempunkte sind die Nullstellen der ersten Ableitung

$$\begin{aligned} f_t'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^2 - t^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 = t^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{t^2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm|t| \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = \pm t \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = -t \quad \text{und} \quad x_2 = t, \end{aligned}$$

da $t > 0$ vorausgesetzt wurde.

Um herauszufinden, ob bei x_1 beziehungsweise x_2 ein Hoch- oder ein Tiefpunkt vorliegt, wird die zweite Ableitung benutzt. Wegen

$$f_t''(x_1) = f_t''(-t) = 2\cdot(-t) = -2t < 0$$

hat der Graph der Funktion f_t an der Stelle x_1 einen Hochpunkt. Es gilt:

$$f_t''(x_2) = f_t''(t) = 2t > 0$$

und damit hat der Graph der Funktion f_t an der Stelle x_2 einen Tiefpunkt.

Die y-Werte der Extrempunkte werden berechnet, indem x_1 und x_2 in den Funktionsterm $f_t(x)$ eingesetzt werden. Es gilt:

$$f_t(x_1) = f_t(-t) = \frac{1}{3}\cdot(-t)^3 - t^2\cdot(-t) = -\frac{1}{3}t^3 + t^3 = \frac{2}{3}t^3.$$

Der Graph der Funktion f_t besitzt den Hochpunkt $\mathrm{H}_t\left(-t\,\middle|\,\frac{2}{3}t^3\right)$.

$$y_2 = f_t(x_2) = f_t(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2\cdot t = \frac{1}{3}t^3 - t^3 = -\frac{2}{3}t^3.$$

Der Graph der Funktion f_t besitzt den Tiefpunkt $\mathrm{T}_t\left(t\,\middle|\,-\frac{2}{3}t^3\right)$.

➤ *Abstand der Extrempunkte*

Mithilfe der obigen Skizze ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras für den Abstand d:

$$\begin{aligned} d^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (-t-t)^2 + \left(\frac{2}{3}t^3 - \left(-\frac{2}{3}t^3\right)\right)^2 \\ &= (-2t)^2 + \left(\frac{4}{3}t^3\right)^2 \\ &= 4t^2 + \frac{16}{9}t^6. \end{aligned}$$

Da der Abstand 13 betragen soll, ist $d = 13$, sodass gilt:

$$169 = 4t^2 + \frac{16}{9}t^6 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{16}{9}t^6 + 4t^2 - 169.$$

Mithilfe eines GTR kann die Lösung ermittelt werden:

$$t \approx 2{,}10.$$

Die beiden Extrempunkte des Graphen der Funktion $f_{2,10}$ haben einen Abstand von 13 LE.

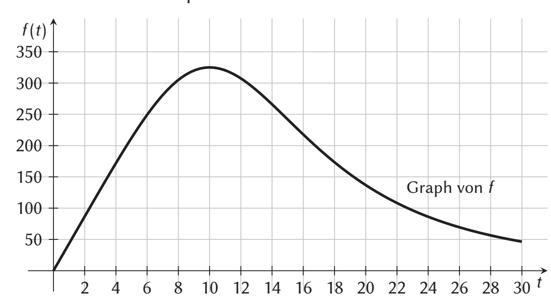
Lösungen

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe A 2.1

a) ➤ *Skizze des Graphen von f*

Mithilfe eines GTR kann der Graph von f skizziert werden.



➤ *Zeitpunkt der maximalen momentanen Ankunftsrate*

Laut Aufgabenstellung beschreibt f genau die momentane Ankunftsrate. Der Zeitpunkt der maximalen momentanen Ankunftsrate entspricht der Stelle, an welcher der Graph von f einen Hochpunkt besitzt. Diese kann mithilfe eines GTR direkt ausgerechnet werden und es gilt: $t = 10$. Die momentane Ankunftsrate wird also nach 10 Stunden maximal sein.

➤ *Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen.*

Da die Funktion f die Ankunftsrate modelliert, bestimmt das Integral im Zeitraum von 0 bis 6 über die Funktion f die Anzahl der ankommenden Fahrzeuge. Es ist folgendes Integral zu berechnen:

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 \frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000}\,\mathrm{d}t.$$

Der Wert dieses Integrals lässt sich mithilfe eines GTR bestimmen:

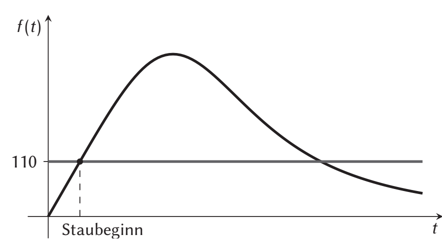
$$\int_0^6 \frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000}\,\mathrm{d}t = 769{,}05.$$

Die Anzahl der Fahrzeuge, die in den ersten 6 Stunden ankommen, liegt bei etwa 769.

b) ➤ *Zeitlicher Beginn des Staus*

Die Fahrzeuge beginnen sich zu stauen, wenn die momentane Ankunftsrate 110 Fahrzeuge übersteigt. In der Skizze lässt sich erkennen, dass also der Zeitpunkt gesucht ist, bei dem der Wert von $f(t)$ zum ersten Mal die 110 überschreitet.

Gesucht sind die Schnittstellen des Graphen von f mit der Gerade $y = 110$.



Somit ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000} = 110.$$

Mithilfe eines GTR können die Lösungen dieser Gleichung bestimmt werden:

$t_1 \approx 2{,}54$

$t_2 \approx 21{,}86.$

Da nach dem Beginn des Staus gefragt ist, muss der kleinere Wert gewählt werden. Nach ungefähr 2,5 Stunden beginnen sich die Fahrzeuge zu stauen.

➤ *Maximale Anzahl der sich stauenden Fahrzeuge*

Sobald sich die Fahrzeuge stauen, ist die Änderungsrate der Anzahl der sich stauenden Fahrzeuge gleich der Differenz der ankommenden und der abgefertigten Fahrzeuge, also

$s(t) = f(t) - 110.$

Bis zum Zeitpunkt t_2 aus der vorherigen Teilaufgabe ist dieser Term positiv und der Stau nimmt zu. Ab dem Zeitpunkt t_2 ist die Änderungsrate s negativ und der Stau nimmt wieder ab. Die maximale Anzahl der Fahrzeuge staut sich also zum Zeitpunkt t_2 und wird durch folgendes Integral über die Änderungsrate beschrieben:

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(t) - 110)\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1\,300\,000 \cdot t}{t^4 + 30\,000} - 110 \right) \mathrm{d}t.$$

Ein GTR liefert das Ergebnis

$$\int_{t_1}^{t_2} (f(t) - 110)\,\mathrm{d}t \approx 2324{,}97.$$

Es stauen sich also maximal ungefähr 2325 Fahrzeuge.

➤ *Änderung der Abfertigungsrate*

Es ist die maximale Anzahl der Fahrzeuge vor dem Grenzübergang gesucht, wenn man nach 12 Stunden die Abfertigungsrate auf 220 Fahrzeuge erhöht. Ab dem Zeitpunkt $t = 12$ beträgt also die Änderungsrate s^* der Anzahl der sich stauenden Fahrzeuge

$s^*(t) = f(t) - 220.$

Lösungen

Die Anzahl der sich stauenden Fahrzeuge zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_3 \geq 12$ beträgt also:

$$\int_{t_1}^{12} (f(t) - 110)\ \mathrm{d}t + \int_{12}^{t_3} (f(t) - 220)\ \mathrm{d}t.$$

Dieser Term wird maximal, wenn die Änderungsrate bei t_3 das Vorzeichen wechselt. Es ist also folgende Gleichung mithilfe eines GTR für $t > 12$ zu lösen:

$$f(t_3) = 220 \quad \Longleftrightarrow \quad t_3 = 15{,}904.$$

Ein GTR liefert die maximale Anzahl der gestauten Fahrzeuge vor dem Grenzübergang:

$$\int_{t_1}^{12} (f(t) - 110)\ \mathrm{d}t + \int_{12}^{t_3} (f(t) - 220)\ \mathrm{d}t \approx 1602{,}4.$$

Wenn die Abfertigungsrate nach 12 Stunden auf 220 erhöht wird, befinden sich maximal ungefähr 1602 Fahrzeuge vor dem Grenzübergang.

Lösung zu Aufgabe A 2.2

a) ➤ *Koordinaten des Extrempunktes*

Die Koordinaten und die Art eines Extrempunktes lassen sich mithilfe der ersten beiden Ableitungen bestimmen. Der Parameter a wird hierbei wie eine konstante Zahl behandelt. Damit ergeben sich die Ableitungen:

$$f_a'(x) = -a \cdot \sin(x),$$
$$f_a''(x) = -a \cdot \cos(x).$$

Nun wird die erste Ableitung gleich 0 gesetzt, um mögliche Extremstellen ausfindig zu machen:

$$f_a'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -a \cdot \sin(x) = 0$$

Wegen $a > 0$ gilt

$$-a \cdot \sin(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \quad x = k \cdot \pi \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In der Aufgabenstellung ist vorgegeben, dass gilt

$$-\pi < x < \pi.$$

Deshalb wird nur die Lösung $x_1 = 0$ weiter betrachtet. Um herauszufinden, ob ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt vorliegt, wird die zweite Ableitung benutzt:

$$f_a''(x_1) = f_a''(0) = -a \cdot \cos(0) = -a < 0.$$

Damit hat der Graph der Funktion f_a an der Stelle x_1 einen Hochpunkt. Die y- Koordinate des Hochpunktes, ist der Funktionswert von f_a an der Stelle x_1:

$$f_a(x_1) = f_a(0) = a \cdot \cos(0) - a^2 = a - a^2.$$

Der Hochpunkt des Graphen der Funktion f_a besitzt die Koordinaten $\mathrm{H_a}\left(0 | a - a^2\right)$.

☞ *Alternative:* Ebenso könnte man diese Aufgabe graphisch lösen, da die Extrempunkte des Graphen der Kosinusfunktion bekannt sind. Der einzige Extrempunkt des Kosinus im Intervall $-\pi < x < \pi$ ist der Hochpunkt bei $\mathrm{H}(0|1)$.

Wegen $a > 0$ findet keine Spiegelung des Graphen an der x-Achse statt. Durch den konstanten Faktor a vor der Kosinusfunktion wird der Graph der Funktion um den Faktor a in y-Richtung gestaucht oder gestreckt. Der Hochpunkt bleibt nach Streckung beziehungweise Stauchung des Graphen ein Hochpunkt. Das bedeutet, dass sich die y-Koordinate des Hochpunktes um den Faktor a ändert. Der Hochpunkt ist nun $\mathrm{H}(0|a)$.

Durch den Term $-a^2$ wird der gestreckte beziehungweise gestauchte Graph um a^2 nach unten verschoben. Mit dem Graphen der Funktion wird auch der Hochpunkt um a^2 nach unten verschoben, sodass seine Koordinaten nun $\mathrm{H}\left(0|a - a^2\right)$ lauten.

b) Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat die Koordinaten $(0|f_a(0))$, wobei

$$f_a(0) = a \cdot \cos(0) - a^2 = a - a^2.$$

Zu untersuchen ist, welche Werte der Term $f(0)$ annehmen kann. Hierzu wird untersucht, für welche Werte von y sich die folgende Gleichung lösen lässt:

$$y = a - a^2$$
$$\Longleftrightarrow \quad a^2 - a + y = 0$$

Die Mitternachtsformel liefert:

$$a_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y}}{2}.$$

Ist der Term unter der Wurzel, die Diskriminante, nichtnegativ, gibt es also immer eine positive Lösung. Keine Lösung gibt es, wenn der Term unter der Wurzel negativ ist. In diesem Fall muss gelten:

$$0 > \frac{1}{4} - y \quad \Longleftrightarrow \quad y > \frac{1}{4}.$$

Somit verläuft durch alle Punkte $(0|y)$ mit $y > 0{,}25$ kein Graph K_a.

☞ *Alternative:* Welche Werte der Term $a - a^2$ annehmen kann, lässt sich auch bestimmen, indem man die Funktion $h(a) = a - a^2$ auf Extrempunkte untersucht.

Das Maximum von $\frac{1}{4}$ bei $a = \frac{1}{2}$ erhält man dann mithilfe der ersten und zweiten Ableitung oder aber indem man h in die Scheitelpunktform bringt:

$$\begin{aligned} h(a) &= -a^2 - a \\ &= -\left(a^2 + a\right) \\ &= -\left(a^2 + a + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &= -\left(\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\ &= -\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

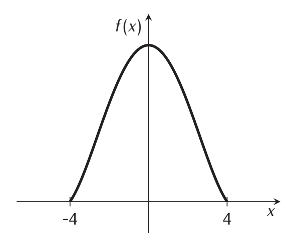
Lösungen

Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe A 1.1

a) ➤ *Steilste Stellen der Wände des Stollens*

Im folgenden Schaubild ist eine Skizze des Graphen abgebildet.



Die Funktion f hat die Nullstellen $x = 4$ und bei $x = -4$. Die Wand des Stollens schließt mit der x-Achse ab. Die Funktion f ist ganzrational und der Funktionsterm $f(x)$ enthält nur Potenzen von x mit geraden Exponenten. Der Graph der Funktion f ist folglich symmetrisch zur y-Achse. Die steilsten Stellen der Wände sind genau die Stellen, an denen der Graph der Funktion f die betragsmäßig größte Steigung aufweist. Diese Stellen sind Wendestellen des Graphen von f beziehungsweise Extremstellen der Funktion f'. Zunächst gilt für die ersten beiden Ableitungen von f:

$$f'(x) = 0{,}08x^3 - 1{,}64x,$$
$$f''(x) = 0{,}24x^2 - 1{,}64.$$

Die Nullstellen von f'' sind die Lösungen der Gleichung:

$$f''(x) = 0 \iff 0{,}24x^2 - 1{,}64 = 0$$
$$\iff x_1 = -\sqrt{\frac{41}{6}} \approx -2{,}61 \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt{\frac{41}{6}} \approx 2{,}61.$$

Die Ränder des Definitionsbereiches befinden sich bei:

$$x_3 = -4 \quad x_4 = 4.$$

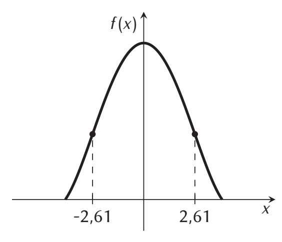
Weil der Funktionsterm $f'(x)$ nur Potenzen von x mit ungeraden Exponenten enthält, ist der Graph von f' punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Darum gilt:

$$|f'(x_1)| = |f'(x_2)| \quad \text{und} \quad |f'(x_3)| = |f'(x_4)|.$$

Also ist nur für x_1 und x_3 zu überprüfen, an welchen Stellen der Betrag der Steigung am größten ist:

$$f'(x_1) \approx 2{,}86,$$
$$f'(x_3) \approx 1{,}44.$$

Die steilsten Stellen der Wände des Stollens liegen also bei $x_1 \approx -2{,}61$ und bei $x_2 \approx 2{,}61$.



➤ *Winkel zwischen Wand und Horizontale*

Um den Winkel α zu bestimmen, den die Wand des Stollens an den steilsten Stellen mit der Horizontalen einschließt, wird der Steigungswinkel α der Tangente an den Graphen von f an den schon bestimmten Stellen berechnet. Die Formel zur Berechnung des Steigungswinkels α der Tangente durch x lautet:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(f'(x)\right)$$

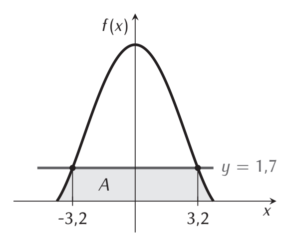
Wegen der Symmetrie des Graphen von f genügt es, lediglich die Stelle $x_1 = -2{,}61$ zu betrachten:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(f'(x_1)\right) \approx \tan^{-1}\left(2{,}86\right) \approx 70{,}7^\circ$$

Die Wände des Stollens schließen mit der Horizontalen an den beiden steilsten Stellen jeweils einen Winkel von ungefähr 70,7° ein.

➤ *Wassermenge im Stollen*

Das Wasser steht im Stollen 1,7 m hoch.



Um die Wassermenge, die sich im Stollen befindet, zu bestimmen, ist zunächst der vom Wasser ausgefüllte Teil A des Stollenquerschnitts zu berechnen. Dazu wird der Flächeninhalt der Gesamtfläche B bestimmt, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. Von dieser Gesamtfläche wird der Inhalt der Teilfläche C zwischen dem Graphen von f und der Geraden $y = 1{,}7$ abgezogen.

Für diese Berechnungen werden also die Nullstellen von f im Intervall $[-4; 4]$ benötigt. Sie liegen am Rand des Definitionsbereiches:

$$x_3 = -4 \quad \text{und} \quad x_4 = 4.$$

Für die Gesamtfläche B, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt ergibt sich also

$$\begin{aligned} B &= \int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-4}^{4} \left(0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 6{,}3\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[0{,}004x^5 - \frac{41}{150}x^3 + 6{,}3x\right]_{-4}^{4} \\ &\approx 23{,}60. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Teilfläche C zwischen dem Graphen von f und der Geraden $y = 1{,}7$ werden die Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden $y = 1{,}7$ im Intervall $[-4; 4]$ benötigt. Diese lassen sich mithilfe eines GTR bestimmen oder aber indem man die biquadratische Gleichung mithilfe der Substition $u = x^2$ löst:

$$\begin{aligned} f(x) = 1{,}7 &\iff 0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 6{,}3 = 1{,}7 \\ &\iff x^4 - 41x^2 + 230 = 0 \\ &\iff u^2 - 41u + 230 = 0 \\ &\iff u_{1/2} = \frac{-(-41) \pm \sqrt{(-41)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 230}}{2 \cdot 1} \\ &\iff u_{1/2} = \frac{41 \pm \sqrt{761}}{2} \end{aligned}$$

Da im Definitionsbereich $u = x^2 \leq 16$ gilt, kommt nur der kleinere Wert infrage. Somit erhält man die Schnittstellen:

$$x_5 = -\sqrt{\frac{41 - \sqrt{761}}{2}} \approx -2{,}59 \quad \text{und} \quad x_6 = \sqrt{\frac{41 \pm \sqrt{761}}{2}} \approx 2{,}59.$$

Damit lässt sich der Flächeninhalt der Teilfläche C berechnen:

$$\begin{aligned} C &= \int_{x_5}^{x_6} (f(x) - 1{,}7)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_5}^{x_6} \left(0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 6{,}3 - 1{,}7\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_5}^{x_6} \left(0{,}02x^4 - 0{,}82x^2 + 4{,}6\right)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[0{,}004x^5 - \frac{41}{150}x^3 + 4{,}6x\right]_{x_5}^{x_6} \\ &\approx 15{,}26. \end{aligned}$$

Für den vom Wasser ausgefüllten Teil A des Stollenquerschnitts ergibt sich nun:

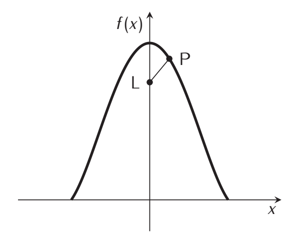
$$A = B - C \approx 23{,}60 - 15{,}26 = 8{,}34.$$

Um nun die gesamte Wassermenge V, die sich im Stollen befindet, zu bestimmen, muss diese Fläche A mit der Länge des Stollens 50 m multipliziert werden. Für das Wasservolumen ergibt sich also:

$$V = A \cdot 50 \approx 8{,}34 \cdot 50 = 417.$$

Damit befinden sich nach dem Wassereinbruch ungefähr 417 m³ Wasser im Stollen.

b) ➤ *Abstand der Lampe zu den Wänden*



Die Lampe soll in 6 m Höhe aufgehängt werden und muss mindestens 1,4 m von den Wänden entfernt sein. Es wird überprüft, ob die Lampe in der Mitte des Stollens im Punkt L(0|6) aufgehängt werden kann.

Dafür wird mit Hilfe des Satz des Pythagoras eine Funktion d aufgestellt, welche den Abstand von L(0|6) zu einem Punkt $P(u|f(u))$ in Abhängigkeit von u angibt:

$$d(u) = \sqrt{(u-0)^2 + (f(u)-6)^2} = \sqrt{u^2 + (f(u)-6)^2}.$$

Der minimale Abstand von der Lampe zu den Wänden ist nun das Minimum der Funktion d im Intervall $[-4; 4]$ und wird mithilfe eines GTR ermittelt, wobei auch die Randwerte zu berücksichtigen sind:

$$d'(u) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_1 \approx -1{,}30 \quad \text{und} \quad u_2 \approx 1{,}30.$$

Es gelten:

$$\begin{aligned} d(-1{,}30) = d(1{,}30) &\approx 1{,}46 \\ d(-4) = d(4) &\approx 7{,}21. \end{aligned}$$

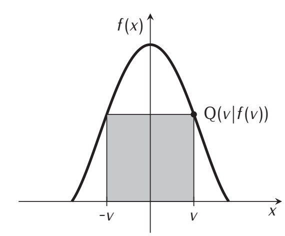
Der kleinste Abstand der Lampe zu den Wänden beträgt also 1,46 m.

Der geforderte Mindestabstand von 1,4 m kann daher eingehalten werden.

c) ➤ *Würfelförmiger Behälter*

Ein würfelförmiger Behälter, der in den Stollen gestellt wird, hat genau dann die größtmögliche Breite, wenn sein Querschnitt symmetrisch zur y-Achse ist und er dabei rechts und links die Wände des Stollens berührt.

Im folgenden Schaubild ist der Sachverhalt skizziert.



Da es sich um einen würfelförmigen Behälter handelt, ist der Querschnitt dieses Behälters ein Quadrat, dessen eine Ecke $Q(v|f(v))$ ist. Dann gilt für die Höhe des Behälters:

$$f(v) = 2v.$$

Aus den genannten Symmetriegründen muss beim Lösen dieser Gleichung nur der Bereich $[0; 4]$ betrachtet werden. Dann ergibt sich mithilfe eines GTR:

$$f(v) = 2v \quad \Longrightarrow \quad v \approx 2{,}22.$$

Nun ist noch zu beachten, dass die Breite des Behälters $2v$ beträgt. Deshalb kann der Behälter höchstens ca. 4,44 m breit sein.

Lösung zu Aufgabe A 1.2

➤ *Nullstellen von f_t*

Zu bestimmen sind die Werte für t, für die f_t mehr als eine Nullstelle besitzt.

Betrachtet wird also die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$f_t(x) = (x-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{t} \cdot e^x\right) = 0.$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist ein Produkt genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, also:

$$x - 1 = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - \frac{1}{t} \cdot e^x = 0.$$

Aus $x - 1 = 0$ ergibt sich somit, dass $x_1 = 1$ unabhängig von t stets eine Nullstelle von f_t ist.

Eine weitere Nullstelle ist gegeben durch

$$1 - \frac{1}{t} \cdot e^x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{t} \cdot e^x = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = t.$$

Für $t > 0$ existiert eine weitere Nullstelle $x_2 = \ln(t)$.

Nun ist noch der Fall zu betrachten, dass die beiden Lösungen zusammenfallen:

$$x_1 = x_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(t) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad t = e.$$

Also fallen die Lösungen für $t = e$ zusammen.

Für alle $t > 0$ mit $t \neq e$ besitzt die Funktion f_t mehr als eine Nullstelle.

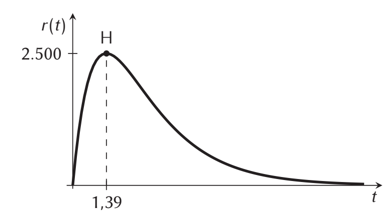


Lösungen zu Analysis, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe A 2.1

a) ➤ *Maximale momentane Zuflussrate*

Gesucht ist der Hochpunkt des Graphen von r im Intervall $[0; 12]$. Im folgenden Schaubild ist der Graph der Funktion r abgebildet.



Mithilfe eines GTR erhält man $t_0 \approx 1{,}39$ als den Zeitpunkt mit der maximalen Zuflussrate. Diese beträgt dann 2500 Liter pro Stunde.

☞ *Alternative:* Die maximale Zuflussrate lässt sich auch ohne GTR berechnen. Dazu wird zunächst die erste Ableitung der Funktion r bestimmt:

$$r'(t) = 10\,000 \cdot \left(-0{,}5e^{-0{,}5t} + e^{-t}\right).$$

Anschließend wird deren Nullstelle ermittelt:

$$\begin{aligned}
& 10\,000 \cdot \left(-0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} + e^{-t}\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} + e^{-t} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{-t} = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}5t} \\
\Longleftrightarrow \quad & -t = \ln 0{,}5 - 0{,}5t \\
\Longleftrightarrow \quad & t = 2 \ln 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & t \approx 1{,}39.
\end{aligned}$$

Zur Überprüfung, ob es sich tatsächlich um einen Extrempunkt des Graphen von r handelt und von welcher Art er ist, wird das VZW-Kriterium genutzt:

$$r'(0) = 10\,000 \cdot (-0{,}5 + 1) = 5000 > 0$$
$$r'(2) = 10\,000 \cdot (-0{,}5 \cdot e^{-1} + e^{-2}) \approx -486 < 0.$$

Da ein Vorzeichenwechsel von + nach - statt findet, befindet sich an der Stelle

$$t_0 = 2 \ln 2 \approx 1{,}39$$

ein Hochpunkt.

Jetzt muss nur noch der Funktionswert an dieser Stelle berechnet werden:

$$r(2 \ln 0{,}5) = 10\,000 \left(e^{-\ln 2} - e^{-2 \ln 2}\right) = 10\,000 \left(0{,}5 - 0{,}5^2\right) = 10\,000 \cdot 0{,}25 = 2500.$$

Lösungen

☞ *Alternative:* Die Ermittlung der maximalen Zuflussrate ohne GTR vereinfacht sich mit der Substitution $u = e^{-0{,}5 \cdot t}$. Der Funktionsterm von r wird dann zu:

$$\begin{aligned} r(u) &= 10\,000 \cdot (u - u^2) \\ &= 10\,000 \cdot (0{,}25 - 0{,}25 + u - u^2) \\ &= 10\,000 \cdot \left(0{,}25 - (u^2 - u + 0{,}25)\right) \\ &= 10\,000 \cdot \left(0{,}25 - (u - 0{,}5)^2\right). \end{aligned}$$

Quadratzahlen sind immer nicht-negativ, weshalb $r(u)$ nie größer als $10\,000 \cdot 0{,}25 = 2500$ ist. Dieser Wert wird für $u_0 = 0{,}5$ angenommen. Zurücksubstituiert bedeutet das:

$$\begin{aligned} e^{-0{,}5 \cdot t_0} = 0{,}5 \quad &\Longleftrightarrow \quad -0{,}5 t_0 = \ln(0{,}5) \\ &\Longleftrightarrow \quad t_0 = 2 \cdot \ln(2) \\ &\Longleftrightarrow \quad t_0 \approx 1{,}39. \end{aligned}$$

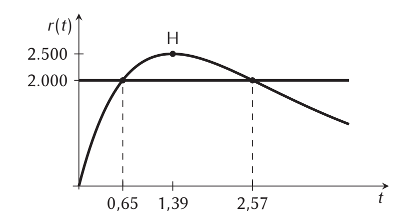
Da t_0 im Intervall $[0; 12]$ liegt und die Randwerte $r(0) = 0$ und $r(12) \approx 24{,}7$ sind, beträgt die maximale Zuflussrate im Intervall $[0; 12]$ gerade 2500 Liter pro Stunde.

➤ *Momentane Zuflussrate größer als* 2000 *Liter pro Stunde*

Zur Berechnung des Zeitraums, in dem die Zuflussrate größer als 2000 Liter pro Stunde ist, werden die Zeitpunkte bestimmt, an denen die Zuflussrate genau 2000 Liter pro Stunde ist. Dies sind die Lösungen der Gleichung:

$$r(t) = 10\,000 \cdot \left(e^{-0{,}5 \cdot t} - e^{-t}\right) = 2000.$$

Mithilfe eines GTR erhält man die beiden Lösungen $t_1 \approx 0{,}65$ und $t_2 \approx 2{,}57$.



Zwischen den beiden Zeitpunkten t_1 und t_2 liegt bei $t_0 \approx 1{,}39$ das Maximum mit 2500 Litern pro Stunde. Damit ist die Zuflussrate zwischen t_1 und t_2 größer als 2000 Liter pro Stunde. Davor und danach ist die Zuflussrate kleiner als 2000 Liter pro Stunde.

Die momentane Zuflussrate ist von etwa 0,65 Stunden bis etwa 2,57 Stunden nach Beginn des Regens größer als 2000 Liter pro Stunde. Das entspricht einem Zeitraum von Minute 39 bis 2 Stunden 34 Minuten.

☞ *Alternative:* Ohne GTR substituiert man wieder $u = e^{-0{,}5 \cdot t}$ und erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} & 10\,000 \cdot \left(u - u^2\right) = 2000 \\ \Longleftrightarrow \quad & u^2 - u + 0{,}2 = 0 \\ \Longrightarrow \quad & u_1 = 0{,}5 + \sqrt{0{,}05} \quad u_2 = 0{,}5 - \sqrt{0{,}05}. \end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt:

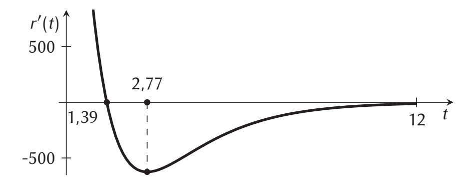
$$t_1 = -2 \cdot \ln\left(0{,}5 + \sqrt{0{,}05}\right) \approx 0{,}65 \quad \text{und} \quad t_2 = -2 \cdot \ln\left(0{,}5 - \sqrt{0{,}05}\right) \approx 2{,}57.$$

➤ *Stärkste Abnahme der Zuflussrate*

Die stärkste Abnahme der Zuflussrate befindet sich dort, wo r' auf $[0; 12]$ minimal wird. Sowohl die Ableitung

$$r'(t) = 10\,000 \cdot \left(-0{,}5e^{-0{,}5t} + e^{-t}\right)$$

als auch deren Minimalstelle auf dem Intervall $[0; 12]$ können mithilfe eines GTR berechnet werden. Im folgenden Schaubild ist der Graph der Ableitungsfunktion r' dargestellt.



Mithilfe eines GTR erhält man $t_3 \approx 2{,}77$. Die Randwerte sind

$$r'(0) = 5000 \quad \text{und} \quad r'(12) = -12{,}3.$$

Beide sind größer als $r'(2{,}77) \approx -625$. Die momentane Zuflussrate nimmt etwa 2,77 Stunden nach Regenbeginn am stärksten ab.

☞ *Alternative:* Ohne GTR untersucht man die erste Ableitung von r auf Extremstellen. Dazu wird die zweite Ableitung von r gebildet:.

$$r''(t) = 10\,000 \cdot \left(0{,}25e^{-0{,}5t} - e^{-t}\right).$$

Anschließend wird deren Nullstelle bestimmt:

$$\begin{aligned} & 10\,000 \cdot \left(0{,}25e^{-0{,}5t} - e^{-t}\right) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0{,}25e^{-0{,}5t} - e^{-t} = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & e^{-t} = 0{,}25e^{-0{,}5t} \\ \Longleftrightarrow \quad & -t = \ln 0{,}25 - 0{,}5t \\ \Longleftrightarrow \quad & t = -2 \ln 0{,}25 \\ & t \approx 2{,}77. \end{aligned}$$

Die Überprüfung, dass es sich bei dieser möglichen Extremalstelle um ein Minimum handelt, kann wieder mit dem VZW-Kriterium erfolgen.

☞ *Alternative:* Die Berechnung ohne GTR lässt sich mit der Substitution $u = e^{-0{,}5 \cdot t}$ vereinfachen:

$$\begin{aligned} r'(u) &= 10\,000 \cdot \left(u^2 - 0{,}5u\right) \\ &= 10\,000 \cdot \left((u - 0{,}25)^2 - 0{,}0625\right). \end{aligned}$$

An der Stelle $u = 0{,}25$ wird der minimale Wert $r'(0{,}25) = -625$ angenommen. Dieser Wert ist minimal -625, was für $u_3 = 0{,}25$ angenommen wird. Zurücksubstituiert ergibt das

$$t_3 = 2 \ln(4) \approx 2{,}77.$$

b) ➤ *Wassermenge im Tank drei Stunden nach Regenbeginn*

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge wird durch $r(t)$ beschrieben. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist diese Wassermenge gleich 0. Also wird die Wassermenge nach drei Stunden durch das Integral von $r(t)$ von $t = 0$ bis $t = 3$ beschrieben.

Es gilt:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 r(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^3 10\,000 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,5\cdot t} - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 10\,000 \cdot \left(\int_0^3 \mathrm{e}^{-0,5\cdot t}\,\mathrm{d}t - \int_0^3 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 10\,000 \cdot \left(\left[-2\mathrm{e}^{-0,5\cdot t}\right]_0^3 - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^3\right) \\ &= 10\,000 \cdot \left[\left(-2\mathrm{e}^{-1,5} - (-2)\right) - \left(-\mathrm{e}^{-3} - (-1)\right)\right] \\ &= 10\,000 \cdot \left(1 - 2\mathrm{e}^{-1,5} + \mathrm{e}^{-3}\right) \\ &\approx 6035{,}27. \end{aligned}$$

Drei Stunden nach Beginn des Regens befinden sich also etwa 6035 Liter Wasser im Tank.

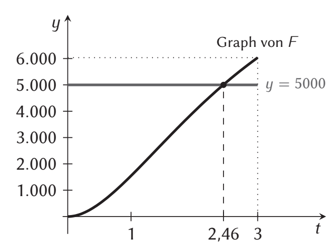
➤ 5000 *Liter Wasser im Tank*

Gesucht ist der Zeitpunkt t^* im Intervall $[0; 12]$, für den gilt:

$$\int_0^{t^*} r(t)\,\mathrm{d}t = 5000.$$

Dazu ermittelt man den Schnittpunkt der Geraden $y = 5000$ mit dem Graphen der Funktion F mit

$$F(t^*) = \int_0^{t^*} r(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t^*} 10\,000 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,5t} - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$$



Mithilfe eines GTR erhält man $t^* \approx 2{,}46$ für die Schnittstelle des Graphen von F mit der Geraden $y = 5000$. Es befinden sich nach etwa 2,46 Stunden 5000 Liter Wasser im Tank.

☞ *Alternative:* Auch dieser Teil lässt sich ohne GTR lösen. Hierzu werden zunächst die Integrale im Funktionsterm von $F(t^*)$ berechnet:

$$\begin{aligned} F(t^*) &= \int_0^{t^*} 10\,000 \cdot \left(\mathrm{e}^{-0,5t} - \mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t \\ &= 10\,000 \cdot \left(\int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-0,5t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{t^*} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 10\,000 \cdot \left(\left[-2\mathrm{e}^{-0,5t}\right]_0^{t^*} - \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{t^*}\right) \\ &= 10\,000 \cdot \left(1 - 2\mathrm{e}^{-0,5t^*} + \mathrm{e}^{-t^*}\right) \end{aligned}$$

Anschließend wird die Stelle t^* ermittelt, an der F den Wert 5000 annimmt:

$$\begin{aligned} & F(t^*) = 10\,000 \cdot \left(1 - 2\mathrm{e}^{-0,5\cdot t^*} + \mathrm{e}^{-t^*}\right) = 5000 \\ \Longleftrightarrow \quad & \mathrm{e}^{-t^*} - 2\mathrm{e}^{-0,5\cdot t^*} + 0{,}5 = 0. \end{aligned}$$

Durch Substitution $u = \mathrm{e}^{-0,5\cdot t^*}$ erhält man die quadratische Gleichung

$$u^2 - 2u + 0{,}5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{1/2} = 1 \pm \sqrt{0{,}5}.$$

Wegen des negativen Exponenten ist $u = \mathrm{e}^{-0,5\cdot t^*}$ für positive t^* stets kleiner als 1, und es kommen nur Lösungen mit $u < 1$ in Frage. Somit muss nur $u_2 = 1 - \sqrt{0{,}5} < 1$ betrachtet werden. Die Rücksubstitution ergibt:

$$u = \mathrm{e}^{-0,5\cdot t^*} = 1 - \sqrt{0{,}5} \quad \Longleftrightarrow \quad t^* = -2\ln\left(1 - \sqrt{0{,}5}\right) \approx 2{,}46.$$

Es befinden sich nach etwa 2,46 Stunden 5000 Liter Wasser im Tank.

c) ➤ *Wasserentnahme in den ersten* 12 *Stunden*

Vom Ende der dritten Stunde bis Ende der zwölften Stunde wird dem Tank Wasser entnommen, das sind insgesamt 9 Stunden. Aus dem Funktionsterm von w wird ersichtlich, dass konstant 400 Liter pro Stunde entnommen werden. Die gesuchte Menge ist also

$$9 \cdot 400 = 3600.$$

In den ersten zwölf Stunden werden 3600 Liter Wasser aus dem Tank entnommen.

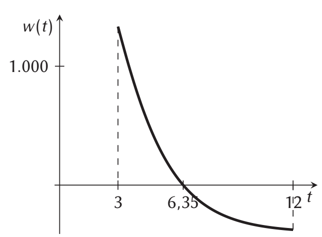
➤ *Abnahme der Wassermenge im Tank*

Die Wassermenge im Tank nimmt zu, wenn die Änderungsrate w positiv ist, und sie nimmt ab, wenn w negativ ist.

Gesucht ist also die Nullstelle von w im Intervall $[3; 12]$, bei der das Vorzeichen von + zu - wechselt.

Lösungen

Mithilfe eines GTR erhält man $t_m = 6{,}35$ als Nullstelle im betrachteten Intervall.



Somit fängt die Wassermenge im Tank etwa 6,35 Stunden nach Regenbeginn an abzunehmen.

☞ *Alternative:* Die gesuchte Nullstelle kann durch die Substitution $u = e^{-0{,}5\cdot t}$ auch ohne GTR gefunden werden:

$$w(u) = 10\,000 \cdot \left(u - u^2\right) - 400 = 0$$
$$\iff \quad u^2 - u + 0{,}04 = 0.$$

Die Mitternachtsformel liefert die Lösungen:

$$u_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}21}$$
$$\implies \quad t_1 = -2\ln(0{,}5 + \sqrt{0{,}21}) \approx 0{,}085 < 3$$
$$t_2 = -2\ln(0{,}5 - \sqrt{0{,}21}) \approx 6{,}35.$$

Mit Hilfe von Funktionswerten zwischen t_1 und t_2 sowie größer als t_2 lässt sich eine Aussage über den Vorzeichenwechsel bei t_2 machen:

$$w(1) \approx 1987 > 0 \quad w(7) \approx -107 < 0.$$

Also wechselt w an der Stelle t_2 das Vorzeichen von + nach -, und die Wassermenge im Tank fängt etwa 6,35 Stunden nach Regenbeginn an abzunehmen.

➤ *Maximale Wassermenge im Tank*

In der vorherigen Teilaufgabe wurde ermittelt, dass die Wassermenge bis zum Zeitpunkt $t_m \approx 6{,}35$ zu- und danach abnimmt. Also befindet sich genau zum Zeitpunkt t_m die maximale Wassermenge V_{max} im Tank. Für die ersten drei Stunden kann das Ergebnis aus Teilaufgabe b) genutzt werden. Die Änderung der Wassermenge im Intervall $[3; t_m]$ muss dann noch addiert werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Änderungsrate nach der dritten Stunde durch die Funktion w beschrieben wird:

$$V_{max} = \int_0^3 r(t)\,dt + \int_3^{t_m} w(t)\,dt$$
$$\approx 6035{,}27 + \int_3^{6{,}35} \left(10\,000 \cdot \left(e^{-0{,}5\cdot t} - e^{-t}\right) - 400\right) dt$$
$$\approx 7841{,}59.$$

Die maximale Wassermenge V_{max} im Tank beträgt etwa 7842 Liter.

Lösung zu Aufgabe A 2.2

➤ *Flächeninhaltsberechnung*

Es gilt $f(0) = f(1) = 0$. Im Intervall $[0; 1]$ liegen keine weiteren Nullstellen von f, denn f besitzt die Periode $P = 2$. Das heißt, die nächste Nullstelle $x = 2$ liegt außerhalb des Intervalls $[0; 1]$.

Somit gilt für die Fläche A, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt:

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^1 \sin(\pi \cdot x)\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi \cdot x)\right]_0^1$$
$$= \left(-\frac{1}{\pi}\cos(\pi)\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\cos(0)\right)$$
$$= \frac{1}{\pi} - \left(-\frac{1}{\pi}\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}.$$

➤ *Funktionsgleichung von g*

Da die Funktion g ganzrational vom Grad 2 ist, wird die folgende Funktionsgleichung angesetzt:

$$g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Nun müssen die gegebenen Informationen aus der Aufgabe mit diesem Ansatz formuliert werden. Da g die Nullstellen 0 und 1 hat, ergibt sich:

$$g(0) = c = 0 \quad \text{und} \quad g(1) = a + b + c = 0.$$

Es folgt also

$$c = 0 \quad \text{und} \quad b = -a.$$

Die Funktion g hat damit die Form:

$$g(x) = ax^2 - ax = a \cdot (x^2 - x).$$

Der Flächeninhalt, den g mit der x-Achse einschließt, lässt sich mit dem Integral berechnen und muss gleich $\frac{A}{2}$ sein:

$$\left|\int_0^1 \left(ax^2 - ax\right)\,dx\right| = \frac{A}{2} = \frac{1}{\pi}$$
$$\iff \quad \left|\left[\frac{a}{3} \cdot x^3 - \frac{a}{2} \cdot x^2\right]_0^1\right| = \frac{1}{\pi}$$
$$\iff \quad \left|\frac{a}{6}\right| = \frac{1}{\pi}$$
$$\iff \quad a = \pm\frac{6}{\pi}.$$

Lösungen

Mögliche Funktionsterme für g sind also:

$$g_1(x) = \frac{6}{\pi} \cdot (x^2 - x)$$

$$g_2(x) = -\frac{6}{\pi} \cdot (x^2 - x).$$

☞ *Alternative:* Weil g die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ besitzt, folgt aus dem Nullstellenansatz

$$g(x) = a \cdot x \cdot (x - 1), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Der Flächeninhalt, den g mit der x-Achse einschließt, lässt sich mit dem Integral berechnen und muss gleich $\frac{A}{2}$ sein:

$$\left| \int_0^1 a \cdot x \cdot (x - 1)\, dx \right| = \frac{A}{2} = \frac{1}{\pi}$$

$$\iff \left| \left[\frac{a}{3} \cdot x^3 - \frac{a}{2} \cdot x^2 \right]_0^1 \right| = \frac{1}{\pi}$$

$$\iff \left| \frac{a}{6} \right| = \frac{1}{\pi}$$

$$\iff a = \pm \frac{6}{\pi}.$$

Mögliche Funktionsterme für g sind also:

$$g_1(x) = \frac{6}{\pi} \cdot x \cdot (x - 1)$$

$$g_2(x) = -\frac{6}{\pi} \cdot x \cdot (x - 1).$$

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe B 1.1

a) ➤ *Koordinatengleichung der Nutzebene*

Als erstes bestimmt man eine Parametergleichung der Ebene F, indem man einen der Eckpunkte, zum Beispiel A, als Stützpunkt und die Verbindungsvektoren zu den anderen beiden Punkten, also $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, als Spannvektoren wählt:

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}.$$

Um eine Koordinatengleichung der Ebene zu bestimmen, berechnet man zunächst den Normalenvektor beispielsweise mithilfe des Kreuzprodukts der Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = 60 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{das heißt} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man einen Ansatz für die Koordinatengleichung:

$$F: 2x_1 + 5x_3 = a.$$

Um den Wert des Parameters a zu berechnen, führt man eine Punktprobe mit dem Stützpunkt B durch:

$$2 \cdot 15 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 30.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene F ist

$$F: 2x_1 + 5x_3 = 30.$$

➤ *Neigungswinkel der Nutzfläche*

Die x_1x_2-Ebene, welche den Erdboden beschreibt, besitzt den Normalenvektor

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Winkel berechnet sich mithilfe der Formel

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \circ \vec{n_2}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

also $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \approx 21{,}8°.$

Lösungen

➤ *Inhalt der Nutzfläche*

Die Nutzfläche ist rechteckig. Ihr Flächeninhalt ist also das Produkt der beiden Seitenlängen:

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = 20 \cdot \sqrt{(-15)^2 + 6^2} = 20 \cdot \sqrt{261} \approx 323{,}11.$$

Da hier eine Längeneinheit gleich einem Meter ist, entspricht eine Flächeneinheit einem Quadratmeter. Die Nutzfläche hat somit einen Flächeninhalt von circa $323{,}11\,\text{m}^2$.

b) ➤ *Überprüfung der Bedingung*

Für diesen Aufgabenteil kann man zum Beispiel denjenigen Punkt C_2 betrachten, der senkrecht über dem Punkt C liegt. Um diesen zu bestimmen, muss man nur die x_1- und x_2-Koordinate von C in E einsetzen und erhält $C_2(0|20|9)$. Der Abstand von C_2 zu C beträgt somit 3 Meter und damit ist die Bedingung erfüllt.

➤ *Koordinaten des gesuchten Punktes*

Hier bietet es sich an, sich einen Punkt C_3 zu suchen, der 5,2 Meter unter C_2 liegt und eine zu E parallele Ebene E_2 zu bilden, die durch diesen Punkt verläuft. Es gilt dann:

$$E_2 : x_1 - 3x_3 = d$$

und nach Punktprobe mit C_3:

$$0 - 3 \cdot 3{,}8 = d \quad \Longleftrightarrow \quad d = -11{,}4.$$

und folglich

$$E_2 : x_1 - 3x_3 = -11{,}4$$

Der gesuchte Punkt ist jetzt der Schnittpunkt der Geraden, auf der BC liegt, mit E_2. Man kann sich das so vorstellen, als ob man die Stütze hinten an der Dachfläche anhält und sie dann soweit nach vorne schiebt, bis sie auf der Kante BC aufliegt. Für die Gerade durch B und C gilt:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Diese Gerade setzt man nun komponentenweise in E_2 ein, um r und anschließend den Schnittpunkt zu bestimmen.

$$(15 - 15r) - 3 \cdot 6r = -11{,}4 \quad \Longleftrightarrow \quad r = 0{,}8$$

Damit ergibt sich der Schnittpunkt durch Einsetzen von r in g zu $S(3|20|4{,}8)$. Dies ist also der Punkt, in dem die Stütze fixiert werden muss.

☞ *Alternative:* Seien $P(p_1|p_2|p_3)$ der Endpunkt der Stütze in F und $Q(q_1|q_2|q_3)$ der Endpunkt der Stütze in E. Da die Stütze senkrecht ist, gelten:

$$q_1 = p_1 \quad \text{und} \quad q_2 = p_2,$$

und da die zweite Koordinate von B und C gleich 20 ist, liegt P in der Ebene mit $x_2 = 20$. Damit gilt auch $p_2 = 20$. Weiterhin ist bekannt, dass sich der Punkt Q genau 5,2 m oberhalb von P befindet, also

$$q_3 = p_3 + 5{,}2.$$

Damit ist $Q(p_1|20|p_3 + 5{,}2)$ und $P(p_1|20|p_3)$. Die Ebenengleichungen der Ebenen E, welche den Punkt Q enthält, und der Ebene F, welche den Punkt P enthält, ergeben das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} p_1 - 3\cdot(p_3 + 5{,}2) &= -27 \\ 2\cdot p_1 + 5\cdot p_3 &= 30. \end{aligned}$$

Dieses hat die Lösungen $p_1 = 3$ und $p_3 = 4{,}8$. Damit ergibt sich für den gesuchten Verankerungspunkt $P(3|20|4{,}8)$.

Lösung zu Aufgabe B 1.2

a) ➤ *Bei zweimaligem Würfeln beträgt die Augensumme 3*

Für dieses Ereignis E gibt es zwei Möglichkeiten: Es wird zunächst eine Zwei und dann eine Eins geworfen oder umgekehrt. Die Wahrscheinlichkeit von E berechnet sich also folgendermaßen:

$$P(E) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

➤ *Bei zwölfmaligem Würfeln erhält man mindestens viermal die Augenzahl 2.*

Die Wahrscheinlichkeit, eine Zwei zu werfen, beträgt

$$p = \frac{1}{3}.$$

Die Zufallsvariable X gibt an, wie oft eine Zwei gewürfelt wird. Die Größe X ist binomialverteilt mit dem $p = \frac{1}{3}$, also $B_{12;\frac{1}{3}}$-verteilt. Es folgt mitihlfe eines GTR:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 0{,}61.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 61 Prozent wird mindestens viermal eine Zwei gewürfelt.

➤ *Änderung der Beschriftung des Würfels*

Die Zufallsvariable Y gibt an, wie oft eine Drei gewürfelt wird. Die Größe Y ist binomialverteilt mit der Wahrscheinlichkeit p, also $B_{12;p}$-verteilt. Es soll gelten:

$$P(Y \geq 4) \geq 0{,}99$$

Da die Wahrscheinlichkeit p, eine Drei zu werfen, ein Vielfaches von $\frac{1}{6}$ sein muss, geht es am schnellsten, mit dem GTR alle Möglichkeiten mit mehr als 2 Dreien auf dem Würfel auszuprobieren:

$$B_{12;\frac{3}{6}}: \quad P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) \approx 0{,}927$$

$$B_{12;\frac{4}{6}}: \quad P(Y \geq 4) = 1 - P(Y \leq 3) \approx 0{,}996$$

Es muss also auf mindestens vier Seiten die Augenzahl 3 stehen.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt hier die Anzahl der geworfenen Augenzahl 3, die Nullhypothese lautet:

$$H_0 : \quad p_0 \leq \frac{1}{6}$$

Wenn H_0 gilt, ist die Größe Y binomialverteilt mit $b = \frac{1}{6}$, also $B_{100;\frac{1}{6}}$-verteilt. Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn die Anzahl der geworfenen Dreien zu groß ist.

Lösungen

Es ist ein rechtsseitiger Test durchzuführen. Insofern erhält man einen Ablehnungsbereich

$A = (g, ..., 100)$,

wobei g die kleinste Zahl ist, für die gilt:

$P(Y \geq g) \leq 0{,}01$

Hier kann man sich mithilfe eines GTR eine Tabelle erstellen lassen, und erhält somit:

$1 - P(Y \leq 25) = P(Y \geq 26) \approx 0{,}012$,

$1 - P(Y \leq 26) = P(Y \geq 27) \approx 0{,}006$.

Daraus trifft man die Entscheidungsregel: Wenn die Augenzahl 3 mindestens 27 mal erscheint, wird die Nullhypothese verworfen, sonst nicht.

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2016, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe B 2.1

a) ➤ *Koordinaten der Mittelpunkte*

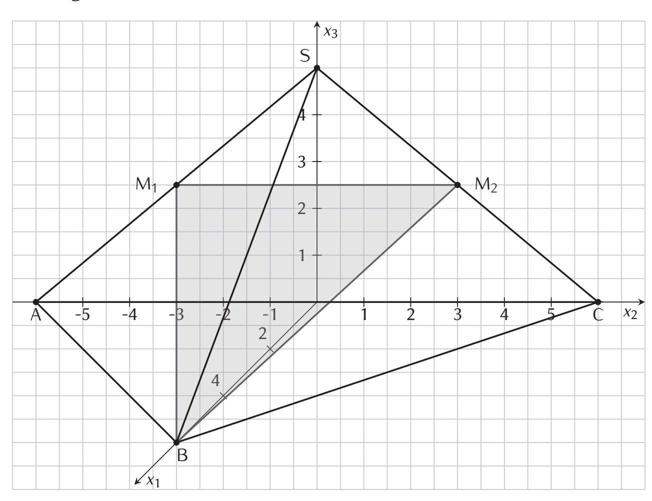
Die Mittelpunkte M_1 und M_2 kann man direkt ablesen, aber auch mit

$\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{A} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{M_2} = \overrightarrow{C} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{CS}$

berechnen. Es ergibt sich:

$M_1(0|-3|2{,}5)$ und $M_2(0|3|2{,}5)$.

➤ *Zeichnung*



➤ *Umfang der Schnittfläche*

Anhand der Zeichnung sieht man, dass die Schnittfläche das Dreiecks BM_2M_1 ist. Der Umfang ist die Summe der Seitenlängen:

$U = \left|\overrightarrow{BM_2}\right| + \left|\overrightarrow{M_2M_1}\right| + \left|\overrightarrow{M_1B}\right|$.

Somit sind die Längen der folgenden Vektoren zu berechnen:

$\overrightarrow{BM_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_2M_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{M_1B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$.

Lösungen

Diese sind

$$\left|\overrightarrow{BM_2}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{51{,}25},$$

$$\left|\overrightarrow{M_2M_1}\right| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6,$$

$$\left|\overrightarrow{M_1B}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2{,}5)^2} = \sqrt{51{,}25}$$

und man erhält

$$U = 6 + 2\sqrt{51{,}25} \approx 20{,}32.$$

Der Umfang der Schnittfläche beträgt in etwa 20,3 LE.

➤ *Koordinatengleichung von E*

Als erstes bestimmt man eine Parametergleichung der Ebene E, indem man einen der Eckpunkte, zum Beispiel B, als Stützpunkt und die angrenzenden Dreieckskanten, also $\overrightarrow{BM_1}$ und $\overrightarrow{BM_2}$, als Spannvektoren wählt:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}.$$

Um eine Koordinatengleichung der Ebene zu bestimmen, berechnet man zunächst das Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \text{das heißt} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man einen Ansatz für die Koordinatengleichung:

$$E : 5x_1 + 12x_3 = a.$$

Um den Wert des Parameters a zu berechnen, wir eine Punktprobe mit dem Stützpunkt B durchgeführt:

$$5 \cdot 6 + 0 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 30.$$

Damit lautet eine Koordinatengleichung der Ebene E

$$E : 5x_1 + 12x_3 = 30.$$

b) Zur Lösung dieser Teilaufgabe bildet man zunächst die Gerade, auf der die Kante BS liegt:

$$g : \vec{x} = \vec{B} + r \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Damit ein beliebiger Punkt Q_r auf g die geforderte Bedingung erfüllt, muss das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{M_1Q_r}$ und $\overrightarrow{M_2Q_r}$ gleich 0 sein. Die Koordinaten dieser Vektoren lauten

$$\overrightarrow{M_1Q_r} = \begin{pmatrix} 6 - 6r \\ 3 \\ -2{,}5 + 5r \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{M_2Q_r} = \begin{pmatrix} 6 - 6r \\ -3 \\ -2{,}5 + 5r \end{pmatrix}.$$

Es muss also gelten:

$$\overrightarrow{M_1Q_r} \circ \overrightarrow{M_2Q_r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (6 - 6r)^2 - 9 + (-2{,}5 + 5r)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 61r^2 - 97r + 33{,}25 = 0.$$

Mithilfe eines GTR oder der Mitternachtsformel erhält man die Lösungen

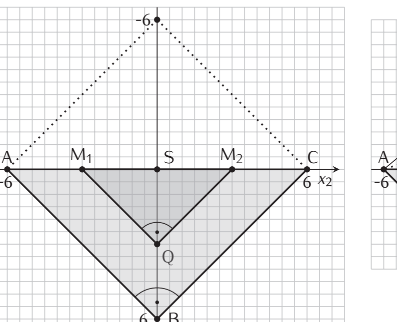
$$r_1 = \frac{133}{122} \approx 1{,}09 \quad \text{und} \quad r_2 = 0{,}5.$$

Für r_1 liegt der zugehörige Punkt nicht zwischen B und S. Mit r_2 ergibt sich:

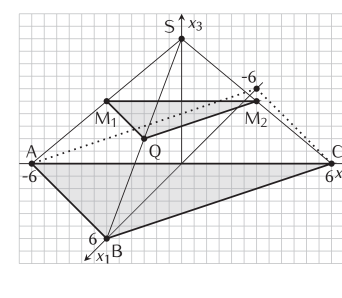
$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte Punkt ist also Q(3|0|2,5).

☞ *Alternative:* Der Punkt (-6|0|0) ergänzt das Dreieck ABC zu einem Quadrat. Folglich hat das Dreieck ABC in B einen rechten Winkel. Außerdem werden die Punkte A und C durch Streckung um das Streckzentrum S mit Faktor 0,5 auf M_1 und M_2 abgebildet.



Draufsicht



Streckt man nun das Dreieck ABC um den Faktor 0,5 um S, so ist das Bild das rechtwinklige Dreieck M_1QM_2, wobei Q auf der Seite BS liegt. Die Koordinaten von Q ergeben sich dann durch

$$\vec{Q} = \vec{S} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

c) Die Grundfläche ABC liegt in der x_1x_2-Ebene, die Seitenfläche ACS in der x_2x_3-Ebene (siehe Zeichnung). Der Abstand zur Grundfläche ABC ist also der Betrag der x_3-Koordinate und der Abstand zu ACS ist die x_1-Koordinate des Punktes Z. Da Z innerhalb der Pyramide liegt, müssen diese Koordinaten beide positiv sein. Weil der Punkt Z laut Aufgabenstellung in der x_1x_3-Ebene liegt, ist seine x_2-Koordinate gleich 0. Zusammengefasst muss Z die folgende Form besitzen:

$$Z(d|0|d).$$

Dann ist der Abstand zur x_1x_2-Ebene und zur x_2x_3-Ebene gerade d. Dies muss dann auch für den Abstand zur Ebene E gelten:

$$\frac{|5d + 12d - 30|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = d \iff \frac{|17d - 30|}{13} = d.$$

Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss d eine der folgenden zwei Gleichungen lösen:

$$17d - 30 = 13d \quad \text{und} \quad 17d - 30 = -13d.$$

Dies führt zu den Lösungen:

$$d_1 = 7{,}5 \quad \text{und} \quad d_2 = 1.$$

Für d_1 liegt der Punkt außerhalb der Pyramide. Die gesuchte Lösung ist Z(1|0|1).

Lösung zu Aufgabe B 2.2

➤ *Anwesenheit aller Fortgeschrittenenpaare*

Die Wahrscheinlichkeit p_1, dass alle Fortgeschrittenenpaare anwesend sind, berechnet sich mittels

$$p_1 = 0{,}75^4 \approx 0{,}316.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von circa 32 % sind also alle Fortgeschrittenenpaare anwesend.

➤ *Anwesenheit von mindestens 6 Anfänger- und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaaren*

Zwei Zufallsvariablen X und Y beschreiben die Anzahl der Anfänger- bzw. Fortgeschrittenenpaare, welche an einem Abend anwesend sind. Die Größe X ist $B_{8;0,9}$-verteilt und die Größe Y ist $B_{4;0,75}$-verteilt. Außerdem sind die Größen X und Y sind unabhängig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_2 berechnet sich mithilfe eines GTR wie folgt:

$$\begin{aligned} p_2 &= P(X \geq 6) \cdot P(Y \leq 3) \\ &= (1 - P(X \leq 5)) \cdot P(Y \leq 3) \\ &\approx 0{,}9619 \cdot 0{,}6836 \\ &\approx 0{,}658. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 6 Anfänger- und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind, beträgt also ungefähr 66 %.

➤ *Anwesenheit von mindestens 11 Paaren*

Es sind mindestens 11 Paare anwesend, wenn entweder alle Paare anwesend sind oder alle Anfänger-und 3 Fortgeschrittenenpaare oder alle Fortgeschrittenen- und 7 Anfängerpaare. Also berechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_3 mittels

$$\begin{aligned} p_3 &= P(X = 8) \cdot P(Y = 4) + P(X = 7) \cdot P(Y = 4) + P(X = 8) \cdot P(Y = 3) \\ &\approx 0{,}430 \cdot 0{,}316 + 0{,}383 \cdot 0{,}316 + 0{,}430 \cdot 0{,}422 \\ &\approx 0{,}438. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 11 Paare anwesend sind, beträgt ungefähr 44 %.

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe B 1.1

a) ➤ *Koordinatengleichung der Ebene E*

Für die Bestimmung einer Koordinatengleichung der Ebene E, welche die Markise beschreibt, werden drei Punkte dieser Ebene benötigt. Beispielsweise die Punkte A(0|0|4), B(5|0|4) und C(5|3,9|2,7). Mit Hilfe dieser drei Punkte, kann die Ebene E zunächst in Parameterform aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ein Normalenvektor der Ebene E kann beispielsweise als Kreuzprodukt der Spannvektoren bestimmt werden:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3{,}9 \\ -1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1{,}3) - 3{,}9 \cdot 0 \\ 0 \cdot 5 - (-1{,}3) \cdot 5 \\ 5 \cdot 3{,}9 - 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6{,}5 \\ 19{,}5 \end{pmatrix} = 6{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist folglich gegeben durch:

$$E: \ x_2 + 3x_3 = d.$$

Eine Punktprobe beispielsweise mit dem Punkt A liefert den Wert des Parameters d:

$$3 \cdot 4 = d \iff d = 12.$$

Also kann die Ebene E beschrieben werden durch die Gleichung

$$E: \ x_2 + 3x_3 = 12.$$

➤ *Winkel α zwischen Markise und Hauswand*

Die Hauswand liegt in der x_1x_3-Ebene, welche folgenden Normalenvektor hat:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Winkel α zwischen Markise und Hauswand entspricht dem Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_3-Ebene. Es muss also der Schnittwinkel dieser beiden Ebenen bestimmt werden. Dieser Winkel entspricht dem Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}_1$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_E$.

Lösungen

Die Berechnung des Winkels erfolgt mittels der Kosinusformel des Skalarprodukts:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n}_E \circ \overrightarrow{n_1}}{|\overrightarrow{n}_E| \cdot |\overrightarrow{n_1}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+3^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

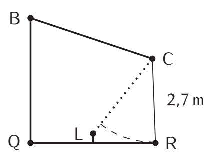
also $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71{,}57°.$

Der Schnittwinkel zwischen Markise und Hauswand beträgt etwa 71,57°.

b) ➤ *Überprüfung, ob es zu einer Berührung kommt*

Zunächst ist hier zu beachten, dass die Einheiten in Meter angegeben sind.

Da sich die 0,3 m hohe Stablampe in der Mitte zwischen den Punkten Q(5|0|0) und R(5|4|0) befindet, liegt ihr oberes Ende im Punkt L(5|2|0,3). Die Punkte C und D haben als x_3-Koordinate beide den Wert 2,7. Somit ist der Regenschutz vertikal 2,7 m lang. Im nachfolgenden Schaubild ist eine Skizze der Situation dargestellt.



Der Regenschutz kann die Stablampe bei starkem Regen also nur dann berühren, wenn der Abstand der Punkte C(5|3,9|2,7) und L(5|2|0,3) höchstens 2,7 m beträgt. Für den Abstand gilt:

$$d(\text{C}; \text{L}) = |\overrightarrow{\text{CL}}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-1{,}9\\-2{,}4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1{,}9^2 + 2{,}4^2} \approx 3{,}06 > 2{,}7.$$

Somit kann der Regenschutz die Stablampe nicht berühren.

➤ *Maximaler Abstand der Lampe zur Hauswand*

Mithilfe der Koordinaten von R und S wird deutlich, dass die Terrasse 4 m von der Hauswand entfernt endet. Für den Abstand a der Stablampe zur Hauswand gilt $0 \leq a \leq 4$, da die Stablampe noch auf der Terrasse stehen soll. Zum Anderen kann davon ausgegangen werden, dass die Stablampe wieder zwischen den Punkten Q und R steht, womit $x_1 = 5$ und $x_3 = 0{,}3$ (Höhe der Lampe) gilt. Die Spitze der Stablampe befindet sich im Punkt $\text{L}_a(5|a|0{,}3)$.

Die Funktion d beschreibt den Abstand von C zu L_a in Abhängigkeit des Parameters a:

$$d(a) = |\overrightarrow{\text{CL}_a}| = \left|\begin{pmatrix}0\\a-3{,}9\\-2{,}4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(a-3{,}9)^2 + 2{,}4^2}.$$

Gesucht wird nun nach dem größten a im Intervall [0; 4], für welches der Abstand d von C zur Spitze der Stablampe 2,7 m beträgt:

$$\begin{aligned} d(a) &= 2{,}7 \\ \iff (a-3{,}9)^2 + 2{,}4^2 &= 2{,}7^2 \\ \iff (a-3{,}9)^2 &= 1{,}53 \\ \iff a_1 &= 3{,}9 - \sqrt{1{,}53} \approx 2{,}66, \\ a_2 &= 3{,}9 + \sqrt{1{,}53} \approx 5{,}14 > 4. \end{aligned}$$

Somit darf die Lampe auf der Terrasse höchstens ca. 2,66 m von der Hauswand entfernt stehen.

c) ➤ *Begründung, dass die Terrasse nicht vollständig beschattet wird*

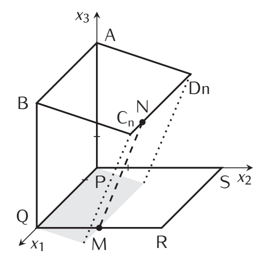
Wie schon in Aufgabenteil b) begründet wurde, ist die Terrasse von der Hauswand aus in x_2-Richtung 4 m lang. Die Punkte auf der Markisenkante CD haben als x_2-Koordinate $x_2 = 3{,}9 < 4$. Nun muss noch die x_2-Koordinate von $\vec{v}$ betrachtet werden. Da diese negativ ist, sind insgesamt die x_2-Koordinaten der Punkte der Schattenlinie von CD kleiner als 4. Somit wird die Terrasse nicht vollständig durch die Markise beschattet.

➤ *Neue Koordinaten der äußeren Eckpunkte*

Auch wenn die Markise eingefahren wird, wird ihre Lage trotzdem weiterhin durch die Ebene

$$E: \ x_2 + 3x_3 = 12$$

beschrieben. Die neuen äußeren Eckpunkte der Markise sollen durch C_n und D_n beschrieben werden. Für diese Punkte gilt dann, dass sie in der x_1-Koordinate mit denen von C bzw. D übereinstimmen, da sowohl die Gerade CD als auch die Gerade $\text{C}_\text{n}\text{D}_\text{n}$ parallel zur x_1-Achse verlaufen.



Für die weitere Berechnung ist nun der Mittelpunkt M(5|2|0) der Kante QR nötig.

Die Gerade g, welche durch den Punkt M in Richtung $\vec{v}$ verläuft, schneidet nun die Ebene E in einem Punkt N auf der Geraden $\text{C}_\text{n}\text{D}_\text{n}$. Die Punkte C_n und D_n haben dann die gleichen x_2- und x_3-Koordinaten wie N.

Für die Gerade g gilt:

$$g : \vec{x} = \vec{M} + t \cdot \vec{v}$$

$$\Longrightarrow \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der gesuchte Schnittpunkt N der Geraden g mit der Ebene E lässt sich nun wie folgt berechnen:

$$2 - t + 3(-3t) = 12$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2 - t - 9t = 12$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = -1.$$

Wird nun $t = -1$ in die Gerade g eingesetzt, so ergibt sich für den Schnittpunkt N:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \text{Schnittpunkt } N(4|3|3).$$

Insgesamt sind dann also die neuen Koordinaten der Eckpunkte der Markise $C_n(5|3|3)$ und $D_n(0|3|3)$.

Lösung zu Aufgabe B 1.2

a) ➤ *Entscheidungsregel*

Da die Kunden vermuten, dass die Keimfähigkeit des Saatgutes kleiner ist als 80 %, wird ein linksseitiger Test mit der Nullhypothese

$H_0 : p \geq 0{,}8$

und der Alternative

$H_1 : p < 0{,}8$

auf dem Signifikanzniveau 10 % durchgeführt.

Ist die Anzahl der keimenden Weizenkörner gering, so spricht dies für die Vermutung der Kunden. Somit ist der Ablehnungsbereich von H_0 von der Form

$A = 0; 1; ..; k.$

Wenn die Zufallsvariable X nun also $B_{0,8;\,500}$-verteilt ist, entspricht k der größten natürlichen Zahl mit

$P(X \leq k) \leq 0{,}1.$

Nun wird dieser kritische Wert k ermittelt:

$P(X \leq 387) \approx 0{,}0826 < 0{,}1$

$P(X \leq 388) \approx 0{,}1004 < 0{,}1.$

Somit ist $K = 387$ und für den Ablehnungsbereich von H_0 folgt:

$A = 0; 1; ..; 387.$

Die Entscheidungsregel lautet also:

Wenn von den 500 getesteten Weizenkörnern höchstens 387 keimfähig sind, so wird die Nullhypothese, also die Behauptung des Großhändlers, abgelehnt.

➤ *Irrtumswahrscheinlichkeit*

Die Zufallsvariable Y in diesem Fall $B_{0,82;\,500}$-verteilt.

Die Nullhypothese wird verworfen, wenn die Werte des Ablehnungsbereichs A erreicht werden.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist dann also

$P(Y \leq 387) \approx 0{,}0053.$

Also wird die Nullhypothese in diesem Fall mit einer Wahrscheinlichkeit von zirka 0,5 % fälschlicherweise verworfen.

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2015, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe B 2.1

a) Die Parameterform der Geraden g_4 lautet:

$$g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um den Schnittpunkt S der Geraden g_4 und der Ebene E zu bestimmen, werden die Koordinaten eine Punktes von g_4 in die Koordinatengleichung der Ebene E eingesetzt, und der Wert des Parameters t bestimmt:

$$3 \cdot (5 + 4 \cdot t) + 6 \cdot (1 + 1 \cdot t) + 4 \cdot (1 + 0 \cdot t) = 16$$
$$\iff \quad 18t = -9$$
$$\iff \quad t = -\frac{1}{2}.$$

Einsetzen von $t = -\frac{1}{2}$ in die Gleichung von g_4 liefert nun den Schnittpunkt S:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes der Gerade g_4 und der Ebene E lauten $S\left(3 \middle| \frac{1}{2} \middle| 1\right)$.

➤ *Zu g_4 orthogonale Gerade der Schar*

Gesucht ist nun ein Wert für a, sodass g_a und g_4 orthogonal verlaufen.

Zwei Geraden sind genau dann orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind. Das ist genau dann der Fall, wenn das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren Null ist. Es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$
$$\iff \quad 4a + 1 = 0$$
$$\implies \quad a = -\frac{1}{4}.$$

Somit ist von der Geradenschar die Gerade $g_{-\frac{1}{4}}$ orthogonal zur Geraden g_4.

b) ➤ *Schnittwinkel α von g_4 und E*

Der Schnittwinkel α lässt sich mit Hilfe des Richtungsvektors $\vec{u_4}$ von g_4, dem Normalenvektor $\vec{n}$ von E und der Formel für den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene berechnen.

Es gelten:

$$\vec{u_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und damit für den Winkel α:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u_4} \circ \vec{n}|}{|\vec{u_4}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}},$$

also $\quad \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{18}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{61}} \right) \approx 34{,}0°.$

Somit beträgt der Schnittwinkel von g_4 und E ungefähr 34,0°.

➤ *Schnittwinkel zwischen g_a und E der Weite* 10°

Ganz allgemein gilt zunächst für den Schnittwinkel β zwischen der Geraden g_a und der Ebene E mithilfe der Formel für den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene:

$$\sin(\beta) = \frac{|\vec{u_a} \circ \vec{n}|}{|\vec{u_a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{a^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2 + 4^2}} = \frac{|3a + 6|}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{61}}.$$

Da nun der Wert für a gesucht ist, für den $\beta = 10°$ gilt, ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\sin 10° = \frac{|3a + 6|}{\sqrt{a^2 + 1} \cdot \sqrt{61}}.$$

Nun lassen sich mit dem GTR die Werte von a im Intervall [-10; 10] ermitteln, die diese Gleichung erfüllen, und es gilt:

$a_1 \approx -1{,}27 \quad$ und $\quad a_2 \approx -3{,}76.$

Somit hat der Schnittwinkel zwischen g_{a_1} und der Ebene E als auch zwischen g_{a_2} und der Ebene E eine Weite von 10°.

c) ➤ *Begründung, dass alle Geraden g_a in der Ebene $F : x_3 = 1$ liegen*

Zunächst wird gegenseitige Lage der Gerade g_a und der Ebene F untersucht. Dazu wird zunächst der Schnittpunkt von g_a und der Ebene F bestimmt, indem die Geradengleichung von g_a in die Ebenengleichung von F eingesetzt wird:

$$1 \cdot (1 + 0 \cdot t) = 1 \quad \implies \quad 1 = 1.$$

Diese Gleichung ist für jeden Wert des Parameters a und jeden Wert des Parameter t wahr. Somit liegt g_a für jedes a in der Ebene F.

Lösungen

➤ *Gleichung der Geraden h*

Zunächst gilt für eine Gerade h, die durch den Punkt $P(5|1|1)$ in eine beliebige Richtung verläuft:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \vec{v}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ein möglicher Normalenvektor der Ebene F ist

$$\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da die Gerade h zusätzlich in der Ebene F liegen soll, muss der Richtungsvektor $\vec{v}$ orthogonal zum Normalenvektor $\overrightarrow{n_F}$ sein. Also muss er die Form

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haben. Weiter soll die Gerade h nicht zur Schar gehören. Das gilt genau dann, wenn $\vec{v}$ für keinen Wert von a ein Vielfaches des Richtungsvektors der Geradenschar g_a ist. Es soll also keine Zahlen a und b geben, sodass gilt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allerdings ist

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = v_2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{v_1}{v_2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad v_2 \neq 0.$$

Also muss $v_2 = 0$ sein. Für v_1 kann nun ein beliebiger Wert gewählt werden, außer $v_1 = 0$. Beispielsweise erhält man mit $v_1 = 1$ eine Gleichung für h:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Lösung zu Aufgabe B 2.2

a) Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Treffer bei fünf Schüssen im Stehen. Die Größe X ist binomialverteilt mit Stichprobenumfang $n = 5$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}88$. Für die Wahrscheinlichkeit, genau vier mal zu treffen, gilt:

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 \approx 0{,}3598.$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, stehend bei fünf Schüssen genau vier Mal zu treffen, ungefähr 36 %.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der Treffer bei fünf Schüssen im Liegen. Die Größe Y ist binomialverteilt mit Stichprobenumfang $n = 5$ und Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}93$.

Der Athlet muss höchstens eine Strafrunde, also keine oder eine Strafrunde laufen, wenn er

(1) liegend und stehend fünf Mal trifft oder
(2) liegend fünf Mal und stehend vier Mal trifft oder
(3) liegend vier mal und stehend fünf Mal trifft.

Die Ereignisse, ob ein Athlet trifft oder nicht, sind unabhängig voneinander. Somit lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Athlet höchstens einmal eine Strafrunde laufen muss, wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} P(X+Y \geq 9) &= P(Y=5) \cdot P(X=5) + P(Y=5) \cdot P(X=4) + P(Y=4) \cdot P(X=5) \\ &= 0{,}88^5 \cdot 0{,}93^5 + \binom{5}{4} \cdot 0{,}88^4 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}93^5 + 0{,}88^5 \cdot \binom{5}{4} \cdot 0{,}94^4 \cdot 0{,}06 \\ &\approx 0{,}7556. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, höchstens eine Strafrunde laufen zu müssen, beträgt also etwa 75,56 %.

c) Die Zufallsvariable Z beschreibt die Anzahl der Treffer bei fünf Schüssen im Stehen. Die Größe Z ist binomialverteilt, wobei $n = 5$ der Stichprobenumfang ist und die Trefferwahrscheinlichkeit p so bestimmt werden muss, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens vier von fünf Mal im Stehen getroffen wird.

Daraus ergibt sich der folgende Ansatz:

$$\begin{aligned} P(Z \geq 4) = 0{,}95 \quad &\Longleftrightarrow \quad p^5 + \binom{5}{4} \cdot p^4(1-p) = 0{,}95 \\ &\Longleftrightarrow \quad p^5 + 5 \cdot p^4(1-p) = 0{,}95 \\ &\Longleftrightarrow \quad p^5 + 5p^4 - 5p^5 = 0{,}95 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4p^5 - 5p^4 + 0{,}95 = 0. \end{aligned}$$

Der GTR liefert die Nullstellen:

$p_1 \approx -0{,}599 \quad p_2 \approx 0{,}924 \quad p_3 \approx 1{,}066.$

Hiervon ist nur p_2 als Zahl zwischen 0 und 1 interessant. Somit muss der Athlet eine Trefferwahrscheinlichkeit p von mindestens zirka 92,4 % erreichen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95 % bei fünf Schüssen im Stehen mindestens vier Mal trifft.

Lösungen

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe B 1.1

a) ➤ *Koordinatengleichung der Ebene E*

Der Ansatz für die Koordinatengleichung von E lautet

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d,$$

wobei n_1, n_2 und n_3 die Koordinaten eines Normalenvektors von E sind. Ein Normalenvektor lässt sich beispielsweise als Kreuzprodukt von zwei Spannvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{SB} \times \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot (-12) - 5 \cdot (-12) \\ -12 \cdot (-5) - (-12) \cdot 5 \\ 5 \cdot 5 - (-5) \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 120 \\ 50 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Da auch jeder vielfache Vektor senkrecht auf die Ebene E steht, wird der folgende Vektor als Normalenvektor der Ebene verwendet:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz für die Koordinatengleichung von E ist gegeben durch:

$$12x_2 + 5x_3 = d.$$

Den Wert des Parameters d erhält man zum Beispiel, indem man die Koordinaten des Punktes $S \in E$ einsetzt:

$$d = 12 \cdot 0 + 5 \cdot 12 = 60.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist:

$$E: \; 12x_2 + 5x_3 = 60.$$

➤ *Winkel zwischen Frundfläche und Ebene E*

Die Grundfläche der Pyramide liegt in der x_1x_2-Ebene, weil die x_3-Koordinaten aller Eckpunkte A, B, C und D des Quadrats den Wert Null haben. Ein Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Winkel zwischen den Flächen entspricht dem Winkel zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}_E$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_1$.

Die Berechnung des Winkels erfolgt mittels der Kosinusformel des Skalarprodukts

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_1}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_1|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 12^2 + 5^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5}{13}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \approx 67{,}38°.$$

Der Winkel, der von der Seitenfläche BCS und der Grundfläche eingeschlossen wird, beträgt etwa 67,38°.

➤ *Flächeninhalt des Dreiecks* BCS

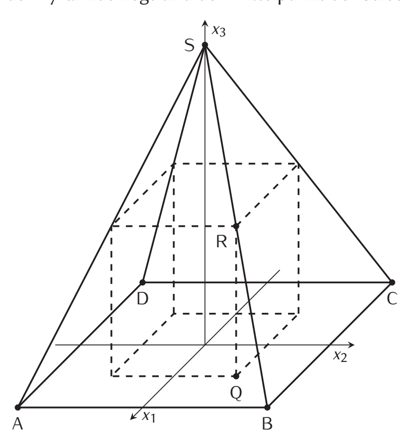
Das Dreieck BCS ist gleichschenklig mit der Basisseite BC, weil die Punkte B und C spiegelsymmetrisch zur x_2-Achse liegen und S auf der Mittelsenkrechten von BC liegt. Die Höhe auf BC ist Teil dieser Mittelsenkrechten. Der Höhenfußpunkt F hat die Koordinaten F(5|0|0) und das Dreieck den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{FS}\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{5^2 + 12^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 13 \\ &= 65. \end{aligned}$$

Das Dreieck BCS hat einen Flächeninhalt von 65 FE.

b) ➤ *Berechnung des Volumens*

Mit Hilfe einer Skizze wird deutlich, dass der Punkt Q ein Eckpunkt des Quaders ist, der in der Grundfläche der Pyramide liegt und der Mittelpunkt der Strecke OB ist.



Lösungen

Aufgrund der Symmetrie der geraden Pyramide handelt es sich bei der Grundfläche der Pyramide um ein Quadrat.

Da sowohl die x_1- als auch die x_2-Koordinate des Punktes Q 2,5 betragen, gilt für die Seitenlänge a des Quadrats

$$a = 2 \cdot 2{,}5 = 5.$$

Nun ist noch die Höhe des Quaders zu bestimmen. Diese entspricht der x_3-Koordinate des Punktes R, der senkrecht über Q auf der Kante BS bzw. in der Ebene E aus Aufgabenteil a liegt. Da die x_1- und x_2-Koordinaten von R denen von Q entsprechen, werden diese in die Koordinatengleichung der Ebene E eingesetzt, um x_3 zu bestimmen:

$$12 \cdot 2{,}5 + 5x_3 = 60 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 6.$$

Die Höhe des Quaders ist somit 6 Längeneinheiten. Für das Volumen gilt:

$$V = 5^2 \cdot 6 = 150.$$

Das Volumen des Quaders beträgt 150 VE.

☞ *Alternative:* Der Punkt $R(2{,}5|2{,}5|x_3)$ liegt auf der Geraden g durch B und S:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von R ergibt $t = 0{,}5$ beziehungweise $x_3 = 6$.

➤ *Koordinaten des Eckpunktes*

Der Wert der ersten beiden Koordinaten des Eckpunktes auf der Seite BS beträgt jeweils die Hälfte einer Seitenlänge der Grundfläche des Quaders. Die x_3-Koordinate entspricht der Höhe des Quaders. Bei einem Würfel sind die Höhe und die Seitenlängen der Grundfläche gleich. Gesucht ist also ein Punkt auf der Kante BS beziehungsweise in der Ebene E, dessen x_1- und x_2-Koordinate gleich sind und dessen x_3-Koordinate doppelt so groß ist. Der Punkt hat also die Koordinaten:

$$R^*(r|r|2r)\,.$$

Setzt man nun diese Koordinaten in die Koordinatengleichung der Ebene E ein, so erhält man den Wert für r:

$$12r + 5 \cdot 2r = 60 \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{30}{11}.$$

Der gesuchte Eckpunkt R* des Würfels lautet somit $R^*\left(\frac{30}{11}\middle|\frac{30}{11}\middle|\frac{60}{11}\right)$.

☞ *Alternative:* Der Punkt $R^*(r|r|2r)$ liegt auf der Geraden g durch B und S:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen von R* ergibt $t = \frac{5}{11}$ beziehungsweise $r = \frac{30}{11}$.

Lösung zu Aufgabe B 1.2

a) ➤ *Wahrscheinlichkeit für mindestens* 12 *Mal eine schwarze Kugel*

Bei dem Experiment handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment, da es zwei mögliche Ergebnisse gibt (Treffer und Niete), welche in jedem Versuchsdurchlauf die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist hier die Wahrscheinlichkeit dafür, eine schwarze Kugel aus dem Gefäß G1 zu ziehen und beträgt:

$$p = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der gezogenen schwarzen Kugeln mit $n = 20$ und $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$. Für die Wahrscheinlichkeit für mindestens 12 schwarze Kugeln gilt

$$P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - P(X \leq 11) \approx 0{,}596.$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei 20-maligem Ziehen mit Zurücklegen aus Gefäß G1 mindestens 12 schwarze Kugeln zu ziehen, beträgt ungefähr 59,6 %.

➤ *Wahrscheinlichkeit für genau* 2 *aufeinanderfolgende schwarze Kugeln*

Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus dem Gefäß G2 zu ziehen beträgt

$$p = 0{,}3.$$

Legt man die zwei Kugeln fest, die als einzige beim 8-maligen Ziehen mit Zurücklegen schwarz sein sollen, so müssen alle anderen sechs Kugeln weiß sein. Die Wahrscheinlichkeit dafür lautet dann:

$$0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6.$$

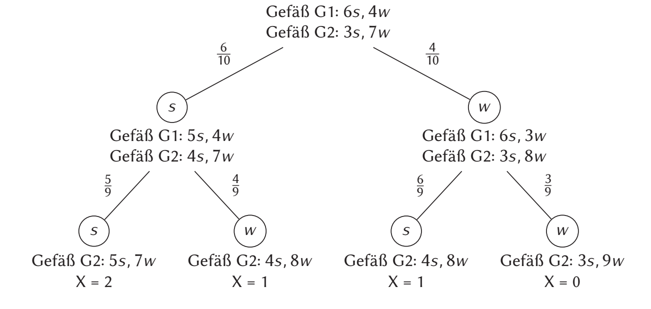
Es gibt insgesamt 7 Möglichkeiten zwei schwarze Kugeln hintereinander unter 8 Kugeln anzuordnen. Somit gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{„Zwei schwarze Kugeln nacheinander aus Gefäß G2"}) = 7 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}0741.$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 7,41 %.

b) Zunächst werden die unterschiedlichen Fälle für zwei Kugeln aus G1 und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Die Zufallsvariable X beschreibt hier die Anzahl der schwarzen Kugeln unter den Kugeln, die aus G1 genommen und in G2 gelegt wurden.

Dabei kann ein Baumdiagramm hilfreich sein:



Lösungen

Für die Wahrscheinlichkeiten, dass zwei, eine beziehungsweise keine schwarze Kugel aus G1 in G2 gelegt wurden, gilt also:

$$P(X=2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3},$$
$$P(X=1)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{48}{90}=\frac{8}{15},$$
$$P(X=0)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15}.$$

Nun werden für die unterschiedlichen Fälle die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis S, dass die aus G2 gezogene Kugel schwarz ist, angegeben:

- Bei zwei schwarzen Kugeln aus G1 beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen:

$$P_{X=2}(S)=\frac{5}{12}.$$

- Bei einer schwarzen und einer weißen Kugel aus G1 beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen:

$$P_{X=1}(S)=\frac{4}{12}.$$

- Bei zwei weißen Kugeln aus G1 beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen:

$$P_{X=0}(S)=\frac{3}{12}.$$

Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen:

$$\begin{aligned}P(S)&=P(X=2)\cdot P_{X=2}(S)+P(X=1)\cdot P_{X=1}(S)+P(X=0)\cdot P_{X=0}(S)\\&=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+\frac{8}{15}\cdot\frac{4}{12}+\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{12}\\&=0{,}35.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen, beträgt 35 %.

☞ *Alternative:* Etwas weniger rechnen muss man, wenn man direkt die gezogene Kugel betrachtet und zunächst unterscheidet, aus welchem Gefäß die Kugel ursprünglich stammt. Hierbei sei A das Ereignis, dass die Kugel ursprünglich aus dem Gefäß G1 stammt. Das ist für zwei der zwölf Kugeln in G2 der Fall. Also gilt für die Wahrscheinlichkeit von A:

$$P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\quad\Longrightarrow\quad P(\overline{A})=\frac{5}{6}.$$

Stammt die Kugel aus G1, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie schwarz ist, gleich

$$P_A(S)=\frac{6}{10}.$$

War die Kugel von Anfang an in G2, so beträgt diese Wahrscheinlichkeit:

$$P_{\overline{A}}(S)=\frac{3}{10}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die aus G2 gezogene Kugel schwarz ist, beträgt also insgesamt:

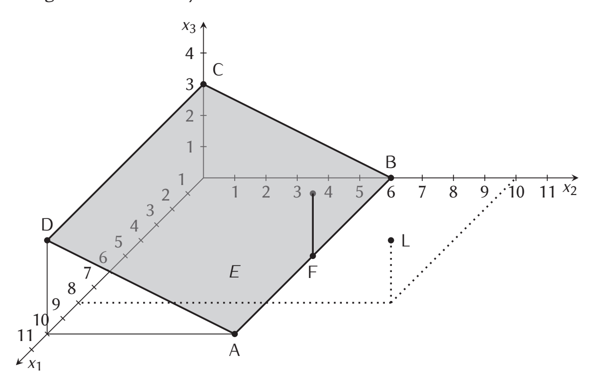
$$\begin{aligned}P(S)&=P(A)\cdot P_A(S)+P(\overline{A})\cdot P_{\overline{A}}(S)\\&=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{10}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{10}\\&=\frac{7}{20}\\&=0{,}35.\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel aus G2 zu ziehen, beträgt 35 %.

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2014, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe B 2.1

a) ➤ *Darstellung im Koordinatensystem*



➤ *Koordinatengleichung von E*

Ein Normalenvektor der Ebene E lässt sich beispielsweise als Kreuzprodukt von zwei Spannvektoren der Ebene E bestimmen:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - (-6) \cdot 0 \\ 0 \cdot (-10) - 3 \cdot (-10) \\ -10 \cdot (-6) - (-10) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 60 \end{pmatrix} = 30 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da auch jedes Vielfache davon senkrecht auf E steht, wird folgender Normalenvektor der Ebene E benutzt

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Ansatz für eine Koordinatengleichung von E ist:

$$x_2 + 2x_3 = d.$$

Der Wert des Parameters d lässt sich bestimmen, indem man zum Beispiel die Koordinaten des Punktes $A(10|6|0)$, der in E liegt, einsetzt:

$$d = 6 + 2 \cdot 0 = 6.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene E lautet:

$$E: \; x_2 + 2x_3 = 6.$$

➤ *Winkel zwischen Stab und Platte*

Der Stab zeigt laut Aufgabe in positive x_3-Richtung. Somit verläuft der Stab in Richtung des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Winkel zwischen dem Stab und der Ebene E kann nun mit Hilfe der Formel für die Winkelberechnung zwischen einer Geraden und einer Ebene berechnet werden:

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{v} \circ \vec{n}_E}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}_E|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \approx 63{,}43°.$$

Der Winkel zwischen dem Stab und der Platte beträgt ungefähr 63,43°.

b) ➤ *Koordinaten des Schattenpunkts* S

Da der Stab 2 m lang ist, im Punkt F befestigt ist und in positive x_3-Richtung zeigt, befindet sich das obere Ende des Stabes im Punkt $F_1(5|6|2)$.

Um den Schattenpunkt des oberen Endes zu bestimmen, wird eine Gerade durch den Punkt L und das obere Ende des Stabes F_1 gebildet:

$$g: \vec{x} = \vec{L} + t \cdot \overrightarrow{LF_1}, \quad t \in \mathbb{R}. = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Schattenpunkt S der Stabspitze ist nun der Schnittpunkt von g und der Ebene E:

$$\begin{aligned} & 10 - 4t + 2 \cdot 2 = 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & 4t = 8 \\ \Longleftrightarrow \quad & t = 2. \end{aligned}$$

Wird jetzt $t = 2$ in die Gleichung der Gerade g eingesetzt, ergibt sich der gesuchte Schattenpunkt S:

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt hat die Koordinaten $S(2|2|2)$.

➤ *Lage des Schattens*

Mit Hilfe der Eckpunkte der Platte beziehungsweise des Rechtecks ABCD wird deutlich, dass ein Punkt $P(x_1|x_2|x_3)$ auf der Platte liegt, wenn gilt:

$$0 \leq x_1 \leq 10$$
$$0 \leq x_2 \leq 6$$

Lösungen

Da die Koordinaten vom Schattenpunkt S diese Bedingungen erfüllen, liegt dieser auf der Platte. Weiterhin liegt das andere Ende des Schattens, nämlich der Punkt F(5|6|0) auf der Kante AB der Platte.

Somit liegt der gesamte Schatten auf der Platte.

c) Da die x_3-Koordinaten der Punkte L und F_1 jeweils den Wert 2 haben, liegt die Kreisbahn der Lichtquelle in der zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene $H : x_3 = 2$.

Die Lichtquelle bewegt sich von L aus auf dieser Kreisbahn. Somit gilt für den Radius r der Kreisbahn:

$$r = \left|\overrightarrow{LF_1}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16+0} = \sqrt{25} = 5.$$

Die Kollisionspunkte müssen also auf der Schnittgeraden g_s der beiden Ebenen H und G liegen und zusätzlich vom Mittelpunkt F_1 den Abstand 5 haben.

Zunächst wird also die Schnittgerade g_s bestimmt. Da die Ebenen H und G beide parallel zur x_1-Achse verlaufen und der Punkt S(2|2|2) in beiden Ebenen liegt, ergibt sich die folgende Geradengleichung von g_s:

$$g_s : \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Nun sind diejenigen Punkte auf g_s gesucht, die zu F_1 den Abstand 5 haben, also

$$\left|\vec{x} - \vec{F_1}\right| = \left|\left[\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-3+r\\-4\\0\end{pmatrix}\right| = 5.$$

Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung:

$$(r-3)^2 + (-4)^2 + 0^2 = 25 \iff (r-3)^2 = 9 \iff r_{1/2} = 3 \pm 3.$$

Somit ergeben sich als mögliche Kollisionspunkte:

$$\vec{S_1} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{S_2} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

Die Lichtquelle kollidiert also entweder im Punkt $S_1(8|2|2)$ oder im Punkt $S_2(2|2|2)$ mit der Platte.

☞ *Alternative:* Die Koordinaten eines Kollisionspunktes $S(s_1|s_2|s_3)$ lassen sich auch nacheinander direkt mithilfe der Voraussetzungen berechnen.

So gilt $s_3 = 2$, da sich die Lichtquelle parallel zur x_1x_2-Ebene auf der Höhe $x_3 = 2$ bewegt.

Einsetzen in die Koordinatengleichung der Ebene E ergibt nun:

$$s_2 + 2 \cdot 2 = 6 \iff s_2 = 2.$$

Letztendlich muss der Punkt S zum Punkt F_1 den gleichen Abstand haben wie zum Punkt L, es gilt also:

$$\left|\overrightarrow{F_1S}\right| = \left|\overrightarrow{F_1L}\right|$$

$$\iff \left|\begin{pmatrix}s_1\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix}\right| = 5$$

$$\iff (s_1-5)^2 + (2-6)^2 + (2-2)^2 = 5^2$$

$$\iff (s_1-5)^2 = 9$$

$$\iff |s_1-5| = 3$$

$$\iff s_1 - 5 = \pm 3.$$

Somit kann s_1 die Werte $5 + 3 = 8$ oder $5 - 3 = 2$ annehmen und die Koordinaten der Kollisionspunkte lauten $S_1(8|2|2)$ und $S_2(2|2|2)$.

Lösung zu Aufgabe B 2.2

a) Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}05$ und dem Stichprobenumfang $n = 800$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lässt sich mithilfe eines GTR berechnen:

$$P(X \leq 30) \approx 0{,}057.$$

Der Erwartungswert $E(X)$ einer binomialverteilten Zufallsvariable X kann als das Produkt des Stichprobenumfangs mit der Trefferwahrscheinlichkeit berechnet werden:

$$E(X) = n \cdot p = 800 \cdot 0{,}05 = 40.$$

Der Wert von X weicht also um weniger als 10 vom Erwartungswert ab, wenn X größer als 30, aber kleiner als 50, also höchstens 49 ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned} P(|E(X) - X| < 10) &= P\big(E(X) - 10 < X < E(X) + 10\big) \\ &= P(30 < X < 50) \\ &= P(31 \leq X \leq 49) \\ &= P(X \leq 49) - P(X \leq 30) \\ &\approx 0{,}935 - 0{,}057 \\ &= 0{,}878. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wert von X weniger als 10 vom Erwartungswert abweicht, ist etwa 87,8 %.

b) Die Zufallsvariable Y beschreibt die Anzahl der fehlerhaften Stifte. Nun ist weiterhin $n = 800$, aber $p = 0{,}02$. Die Nullhypothese H_0 lautet:

$$H_0 : p \leq 0{,}02$$

und die Gegenhypothese

$$H_1 : p > 0{,}02.$$

Es handelt sich um einen rechtsseitigen Test mit Ablehnungsbereich $\{N, N+1, \ldots, 800\}$.

Lösungen

Gesucht ist nach dem minimalen Wert für N, sodass die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens N Stifte fehlerhaft sind, kleiner als 0,05 ist. Es muss also gelten:

$$P(Y \geq N) = 1 - P(Y \leq N - 1) < 0{,}05$$
$$\Longleftrightarrow \quad P(Y \leq N - 1) > 0{,}95.$$

Mithilfe eines GTR erhält man:

$$P(Y \leq 21) \approx 0{,}944 < 0{,}95$$
$$P(Y \leq 22) \approx 0{,}965 > 0{,}95.$$

Es muss daher $N - 1 = 22$ gelten und folglich entscheidet man sich ab einer Anzahl von 23 fehlerhaften Stiften gegen die Hypothese.

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 1

Lösung zu Aufgabe B 1.1

a) ➤ *Darstellung im Koordinatensystem*

Für die Darstellung der Ebene in einem Koordinatensystem werden die Spurpunkte berechnet. Dies sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Hierfür werden je zwei der drei Koordinaten Null gesetzt und der Wert der dritten Koordinate ermittelt. Da die x_1-Koordinate in der Ebenengleichung nicht vorhanden ist, ist die Ebene parallel zur x_1-Achse.

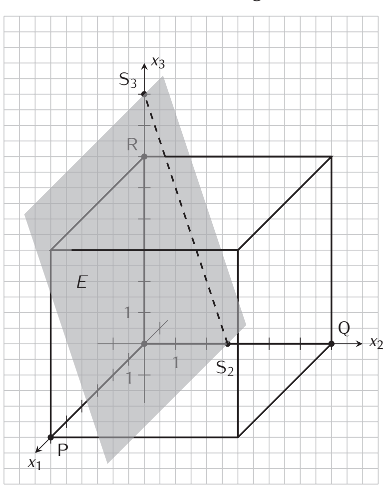
Schnittpunkt mit der x_2-Achse:

$$3x_2 + 0 = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3} \quad \Longrightarrow \quad S_2\left(0\left|\frac{8}{3}\right|0\right).$$

Schnittpunkt mit der x_3-Achse:

$$0 + x_3 = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad S_3(0|0|8).$$

Der Würfel sowie die Ebene lassen sich nun wie folgt darstellen.



➤ *Winkel zwischen Ebene E und der x_1x_2-Ebene*

Der Winkel α, den zwei Ebenen einschließen, entspricht dem Winkel, der von den beiden Normalenvektoren der Ebenen eingeschlossen wird.

Lösungen

Der Normalenvektor der Ebene E lässt sich direkt ablesen und lautet

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist gegeben durch

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun lässt sich der Winkel zwischen den beiden Vektoren wie folgt berechnen

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \approx 71{,}56°.$$

Der Winkel zwischen der Ebene E und der x_1x_2-Ebene beträgt näherungsweise 71,56°.

➤ *Abstand von E zur x_1-Achse*

Schneiden sich eine Gerade und eine Ebene nicht, so ist jeder Punkt auf der Geraden gleich weit von der Ebene entfernt. Man wählt nun also einen beliebigen Punkt auf der x_1-Achse, beispielsweise O(0|0|0) und berechnet den Abstand von der Ebene E zum Punkt O über folgende Formel

$$d(\mathrm{O}, E) = \frac{|3 \cdot 0 + 0 - 8|}{|\vec{n}_E|} = \frac{|-8|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} \approx 2{,}53.$$

Der Abstand der Ebene E zur x_1-Achse beträgt etwa 2,53 LE.

b) Laut Aufgabenstellung gehört die Ebene E gehört zu einer Ebenenschar, die gegeben ist durch:

$$E_a : 3x_2 + x_3 = a; \ a \in \mathbb{R}.$$

➤ *Lage der Ebenen der Schar*

Da alle Ebenen der Schar den gleichen Normalenvektor

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

haben, liegen die Ebenen für verschiedene Werte von a parallel zueinander.

➤ *Ebenen mit Abstand $\sqrt{10}$ zu S(6|6|6)*

Der Abstand der Ebene E_a zum Punkt S kann bestimmt werden durch

$$d(\mathrm{S}; E_a) = \frac{|3 \cdot 6 + 6 - a|}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|24 - a|}{\sqrt{10}}.$$

Gesucht ist nun diejenige Ebene E_a, welche den Abstand $\sqrt{10}$ zum Punkt S besitzt, also:

$$d(\mathrm{S}; E_a) = \sqrt{10} \iff \frac{|24 - a|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$
$$\iff |24 - a| = 10$$
$$\iff 24 - a = \pm 10.$$

Damit gilt:

$$a_1 = 14 \quad \text{und} \quad a_2 = 34.$$

Somit haben die folgenden beiden Ebenen den Abstand 10 vom Punkt S(6|6|6):

$$E_{14} : 3x_2 + x_3 = 14$$
$$E_{34} : 3x_2 + x_3 = 34.$$

➤ *Gemeinsame Punkte von E_a mit dem Würfel*

Die Spurpunkte der Ebene E_a für $a \in \mathbb{R}$ sind

$$\mathrm{S}_2\left(0\middle|\frac{a}{3}\middle|0\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{S}_2(0|0|a).$$

Einen Spurpunkt mit der x_1-Achse besitzt nur die Ebene E_0. Mit S_2 und S_3 liegt auch die Verbindungsstrecke der beiden Punkte in E_a.

Für $a < 0$ gibt es jedoch keine gemeinsamen Punkte mit dem Würfel. Da der Punkt $\left(0\middle|\frac{a}{4}\middle|\frac{a}{4}\right)$ nur dann ein gemeinsamer Punkt des Würfels und der Ebene E_a ist, wenn

$$0 \leq \frac{a}{4} \leq 6 \quad \text{und folglich} \quad 0 \leq a \leq 24$$

gilt, gibt es nur für $0 \leq a \leq 24$ gemeinsame Punkte von Würfel und Ebene E_a.

Lösung zu Aufgabe B 1.2

Im Nachfolgenden bezeichnet X die Anzahl der gezogenen Gewinnlose. Bei dem Experiment handelt es sich um ein Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p = 0{,}1$$

und $n = 3$ für die Anzahl der Wiederholungen.

➤ *Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose*

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei drei Losen mindestens zwei Gewinnlose dabei sind, ist:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 0) \\ &= 1 - 3 \cdot 0{,}081 - 0{,}729 \\ &= 0{,}028. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von drei Losen mindestens zwei gewinnen, ist 2,8 %.

➤ *Mindestanzahl der Lose*

Um die Mindestanzahl der Lose zu bestimmen, damit die Wahrscheinlichkeit für zwei Gewinnlose mindestens 50 % beträgt, wird die Wahrscheinlichkeit als Funktion von n aufgefasst.

Es gilt nach wie vor $p = 0{,}1$ und $k = 2$. Gesucht wird das somit kleinste n, für das gilt:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) > 0{,}5.$$

Es gilt für $n = 16$:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}485 < 0{,}5,$$

und für $n = 17$:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}518 > 0{,}5$$

Es hätten also mindestens 17 Lose gekauft werden müssen, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei Gewinnlose über 50 % liegt.

Lösungen zu Analytische Geometrie/Stochastik, Wahlteil 2013, Aufgabengruppe 2

Lösung zu Aufgabe B 2.1

a) Die fehlenden Koordinaten der Punkte in der Abbildung lauten:

$$B(8|8|0)\,,\; E(8|0|8)\,,\; F(8|8|8)\,,\; G(0|8|8)\,,\; M_1(8|0|4)\,,\; M_2(4|0|8)\,.$$

➤ *Koordinatengleichung der Ebene S*

Der Ansatz für eine Koordinatengleichung der Ebene S ist

$$S:\; n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d,$$

wobei n_1, n_2 und n_3 die Koordinaten eines Normalenvektors von S sind. Ein Normalenvektor lässt sich zum Beispiel als Kreuzprodukt von zwei Spannvektoren bestimmen:

$$\overrightarrow{FM_1} \times \overrightarrow{FM_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \cdot 0 - (-8) \cdot (-4) \\ -4 \cdot (-4) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-8) - (-4) \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 \\ 16 \\ -32 \end{pmatrix} = -16 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da jedes Vielfache dieses Vektors als Normalenvektor benutzt werden kann, wird im Folgenden der Vektor

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

verwendet.

Der Ansatz für Koordinatengleichung lautet nun:

$$S:\; 2x_1 - x_2 + 2_3 = d.$$

Den Wert des Parameters d erhält man durch Einsetzen des Punktes $F(8|8|8)$:

$$d = 2 \cdot 8 - 8 + 2 \cdot 8 = 24.$$

Eine Koordinatengleichung der Ebene S lautet:

$$S:\; 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24.$$

Lösungen

➤ *Gleichschenkligkeit des Dreiecks*

Bei einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei der drei Seiten gleich lang. Dies wird nun geprüft:

$$|\overrightarrow{FM_1}| = \left|\begin{pmatrix}0\\-8\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2+(-8)^2+(-4)^2} = \sqrt{80},$$

$$|\overrightarrow{FM_2}| = \left|\begin{pmatrix}-4\\-8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-4)^2+(-8)^2+0^2} = \sqrt{80}.$$

Die Seiten $\overline{FM_1}$ und $\overline{FM_2}$ sind gleich lang, somit ist das Dreieck gleichschenklig mit der Basisseite M_1M_2.

➤ *Flächeninhalt des Segeltuchs*

Im Folgenden bezeichnet M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{M_1M_2}$. Dieser ist im gleichschenkligen Dreieck der Höhenfußpunkt und hat die Koordinaten

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\left(\vec{M_1}+\vec{M_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}8\\0\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}12\\0\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix}.$$

Für den Flächeninhalt des Segeltuchs gilt

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MF}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}4-8\\0-0\\8-4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}8-6\\8-0\\8-6\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+8^2+2^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{32}\cdot\sqrt{72} \\ &= 24. \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt des Segeltuchs beträgt $24\,\text{m}^2$.

➤ *Abstand des Segeltuchs von der Ecke E*

Der Abstand d des Tuchs von der Ecke E entspricht dem Abstand der Ebene S zum Punkt E(8|0|8). Dieser lässt sich über die Hessesche Normalenform berechnen. Es gilt:

$$d = \frac{|2\cdot 8 - 0 + 2\cdot 8 - 24|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \frac{|8|}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67.$$

Der Abstand des Tuchs zur Ecke E beträgt etwa 2,67 m.

b) Zunächst wird eine Gleichung der Gerade g durch die Punkte A und C bestimmt:

$$g: \vec{x} = \vec{A} + t\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Das untere Ende der Stange liegt nun so auf dieser Geraden, dass das obere Ende, das sich 6 Einheiten darüber befindet, auf der Ebene S liegt. Man kann also einfach die Koordinaten des oberen Endes, $(8-8t|8t|0+6)$, in die Koordinatengleichung von S einsetzen.

$$\begin{aligned} 2(8-8t)-(0+8t)+2(6+0t) &= 24 \\ 28-24t &= 24 \\ t &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Nun wird $t = \frac{1}{6}$ in die Gleichung der Geraden g eingesetzt und damit der Punkt, an dem sich das untere Ende der Stange befindet, berechnet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{20}{3}\\\frac{4}{3}\\0\end{pmatrix}.$$

Das untere Ende der Stange liegt im Punkt $\left(\frac{20}{3}\middle|\frac{4}{3}\middle|0\right)$.

Lösung zu Aufgabe B 2.2

a) ➤ *Nachweis eines fairen Spiels*

Damit das Spiel fair ist, muss der erwartete Gewinn gleich dem Einsatz sein. Im Folgenden bezeichnet die Zufallsvariable X die Auszahlung an den Spieler in Euro. Es muss also gelten

$$E(X) = 0{,}20.$$

Nun werden zunächst die Wahrscheinlichkeiten für die angegebenen Auszahlungsmöglichkeiten berechnet. Dabei wird die Voraussetzung benutzt, dass die Drehungen unabhängig voneinander sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler 2 Euro ausbezahlt bekommt, beträgt:

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(\text{„Stern-Stern"}) \\ &= P(\text{„Stern"})\cdot P(\text{„Stern"}) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{36}, \end{aligned}$$

die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler 0,85 Euro ausbezahlt bekommt:

$$\begin{aligned} P(X=0{,}85) &= P(\text{„Diamant-Diamant"}) \\ &= P(\text{„Diamant"})\cdot P(\text{„Diamant"}) \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9}, \end{aligned}$$

Lösungen

und die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler 0,20 Euro ausbezahlt bekommt:

$$\begin{aligned} P(X=0{,}2) &= P(\text{„Kleeblatt-Kleeblatt“}) \\ &= P(\text{„Kleeblatt“}) \cdot P(\text{„Kleeblatt“}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Es gilt für den Erwartungswert von X

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \cdot P(X=2) + 0{,}85 \cdot P(X=0{,}85) + 0{,}2 \cdot P(X=0{,}2) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{36} + 0{,}85 \cdot \frac{1}{9} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{5} \\ &= 0{,}2. \end{aligned}$$

Die erwartete Auszahlung ist genauso hoch wie der Einsatz: Das Spiel ist fair.

➤ *Änderung des Auszahlungsbetrags für „Diamant-Diamant“*

Der Veranstalter gewinnt genau dann 5 Cent bei jedem Spiel, wenn der Erwartungswert 0,15 beträgt. Der gesuchte Auszahlungsbetrag wird mit k bezeichnet. Es muss also gelten

$$2 \cdot \frac{1}{36} + k \cdot \frac{1}{9} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}15 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{9}k = \frac{2}{45}$$
$$\Longleftrightarrow \quad k = 0{,}4.$$

Der neue Auszahlungsbetrag für die Kombination „Diamant-Diamant“ muss also 40 Cent betragen.

b) Die Nullhypothese, das Signifikanzniveau sowie der Stichprobenumfang lauten:

$$H_0 : p \geq \frac{1}{36}, \quad \alpha = 0{,}05, \quad n = 500.$$

Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest mit dem Ablehnungsbereich $\{0, \ldots, k\}$ Die Zufallsvariable Y gibt an, wie oft das Ereignis „Stern-Stern“ eintritt. Gesucht wird das größtmögliche $k \in \mathbb{N}$, sodass für die binomialverteilte Zufallsvariable Y mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{36}$ und $n = 500$ Versuchen gilt:

$$P(Y \leq k) < 0{,}05$$

Mit dem GTR erhält man:

$$P(Y \leq 7) \approx 0{,}032 < 0{,}05$$
$$P(Y \leq 8) \approx 0{,}063 > 0{,}05$$

Damit gilt für den Annahmebereich A

$$A = \{k+1, \ldots, 500\} = \{8, \ldots, 500\},$$

sowie für den Ablehnungsbereich $\overline{A}$

$$\overline{A} = \{0, \ldots, k\} = \{0, \ldots, k\}.$$

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn bei 500 Spielen höchstens 7 mal „Stern-Stern“ erscheint, andernfalls wird die Nullhypothese nicht abgelehnt.